Stefano Giovanni Loffi

Piccola
Storia dell'Idraulica

libera traduzione, ridotta ma integrata, di

"*History of Hydraulics*" di Hunter Rose e Simon Ince
dell'Istituto di Ricerca Idraulica dell'Università Statale dell' IOWA – U.S.A.,
édita, nel 1954, come supplemento, su "*LA HOUILLE BLANCHE*" .

Cap. 13 – L'avvento dell'Idrodinàmica

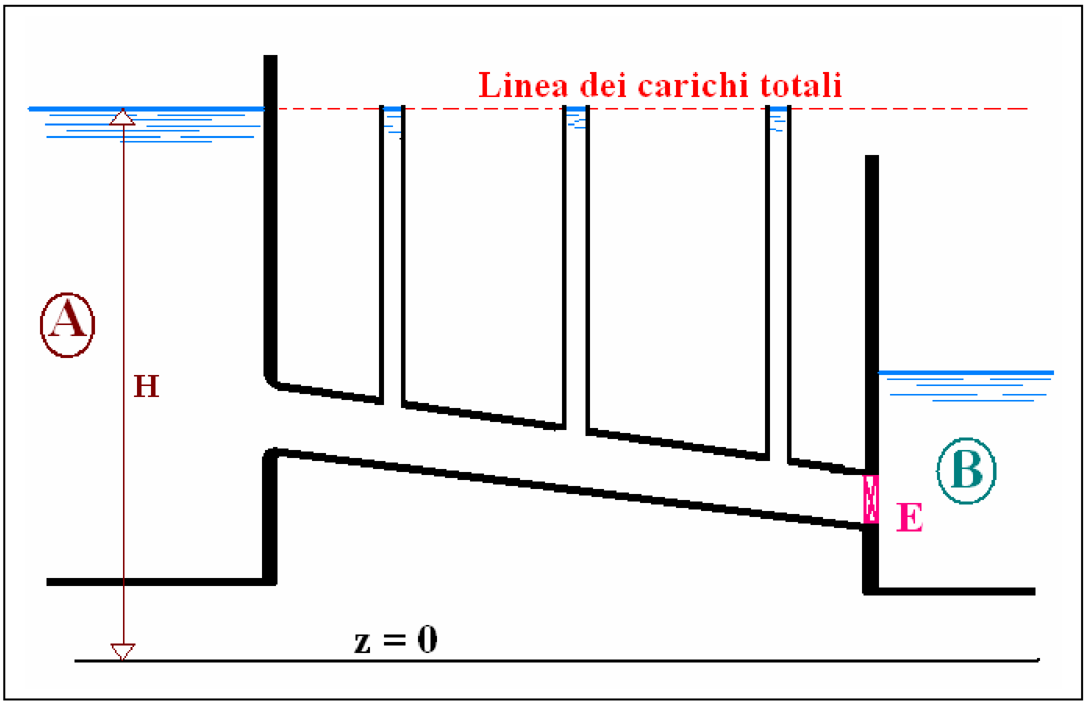
Cremona 23 dicembre 2006

Capitolo 13 – L'avvento dell'Idrodinàmica

La nascita dell'Idrodinàmica, parte della scienza Idraulica che studia il comportamento di fluidi in movimento, è collocata nel XVIII sècolo, sempre considerando tale riferimento quale frutto di un'inevitàbile schematizzazione della storia dell'umanità che, al contrario, è una successione di eventi strettamente collegati ed interdipendenti: un *continuus* perfetto, come il tempo. In tale significato schematico, quindi, parliamo di fondazione dell'Idrodinàmica e dei suoi protagonisti, esponenti di grande valore della Matemàtica del Settecento: gli svizzeri Daniel I Bernoulli e Leonhard Euler, stretto collaboratore ed amico del primo, ed i francesi Alexis Claude Clairaut e Jean le Rond d'Alembert.

Cominciamo questo Capitolo in modo insòlito, riassumendo, in due schemi, l'inizio e la fine di ciò che poi racconteremo nel dettaglio.

Immaginiamo di disporre di due serbatoî, **A** e **B**, nei quali l'acqua sìa a livelli differenti: in **B** a quota inferiore che in **A**.



I due serbatoî sono collegati da una tubazione, alla quale sono applicati tre tubi verticali, i *piezòmetri*, che si innàlzano sino ad una quota superiore alla quota dell'acqua contenuta nel serbatoio **A**. Per il *Princìpio dei vasi comunicanti*, che (vedi al Capitolo 2) potrebbe chiamarsi '*Princìpio di Erone*', quando la saracinesca **E** è chiusa, i due serbatoî non sono in comunicazione, ed il livello nei tre piezòmetri raggiunge la stessa altezza dell'acqua nel serbatojo **A**.

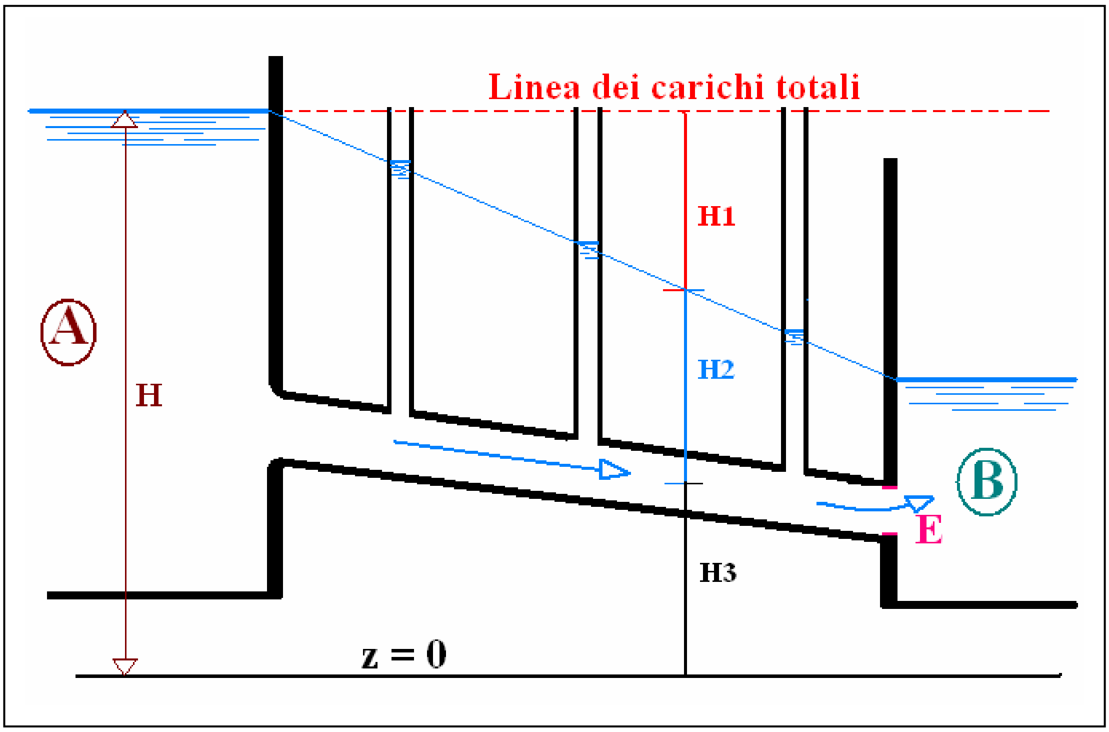
L'energìa complessiva dell'acqua contenuta nel serbatojo **A**, rispetto al piano **z = 0**, è esclusivamente di tipo potenziale, cioè latente (la massa d'acqua è ferma), e può essere indicata con l'altezza **H** dell'acqua rispetto a detto piano, scelto come riferimento. L'altezza **H** individua la **Linea dei càrichi totali**, che, nel nostro sistema, corrisponde alla massima energìa, espressa come altezza rispetto a **z = 0**, posseduta dall'acqua nel serbatojo **A** .

Che accade quando la saracinesca **E** viene aperta?

È evidente che l'acqua fluirà dal sebatojo **A** al serbatojo **B**, posto a quota inferiore, ma con quale velocità, quindi con quale portata?

Quali pressioni troveremo nella tubazione che collega i due serbatoî?

A quale altezza si porterà l'acqua nei tre piezòmetri?



Sebbene possa sembrare semplicistico, diremo che l'Idrodinàmica prende l'avvìo, attraverso il lavoro dei quattro scienziati che qui ricorderemo, proprio dando le corrette risposte a queste domande.

Dal loro lavoro, si scoprì che l'energìa complessiva dell'acqua, rispetto al piano **Z = 0**, che chiamiamo carico **H**, si trasforma - nel moto all'interno del tubo, generàto dall'apertura della saracinesca **E** e dopo il tempo necessario a rendere costante la velocità in ogni punto del condotto (cioè in *moto permanente*) - nelle tre componenti, **H1**, **H2** ed **H3**, che rappresentano le tre forme di energìa nelle quali si è trasformata l'iniziale ed ùnica energìa potenziale.

Come fecero i quattro scienziati, dei quali diremo, seguiamo l'ipòtesi iniziale di lavorare con un fluido cosidetto 'perfetto', cioè di un fluido che non disperde alcuna frazione di energìa nel movimento.

È una perfezione irreale ma ùtile per affrontare il problema nel modo più semplice.

Ecco le tre frazioni nelle quali si divide l'iniziale energìa potenziale **H**:

- $\mathbf{H1} = \dfrac{V^2}{2g}$ è l'energìa cinética del fluido, pari al quadrato della velocità media del flusso diviso due volte l'accelerazione di gravità.

- **H2** $= \dfrac{p}{\gamma}$ è l'energìa 'di pressione', data dal rapporto tra la pressione ed il peso specifico;
- **H3** $= z$ è l'energìa potenziale residua, o *altezza geodética*, distanza della mezzerìa del tubo, quindi del flusso, rispetto al piano $z = 0$.

Così come sono state scritte, queste tre energìe, da riferirsi all'unità di peso del fluido, hanno la particolarità d'essere espresse con la medésima unità di misura: il metro; infatti:

$$\mathbf{H1} = \frac{V^2}{2g} \rightarrow \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{1}{\frac{m}{s^2}} = \frac{m^2}{s^2} \cdot \frac{s^2}{m} = \mathrm{m}$$

$$\mathbf{H2} = \frac{p}{\gamma} \rightarrow \frac{\frac{kg}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{kg}{m^2} \cdot \frac{m^3}{kg} = \mathrm{m}$$

La conclusione del lavoro che presentiamo in questo Capitolo, universalmente attribuìta al solo Daniel I Bernoulli anche se questi non giunse a concepìre tale formula, è la seguente, nòta al mondo intero quale espressione del *Teorema di Bernoulli*:

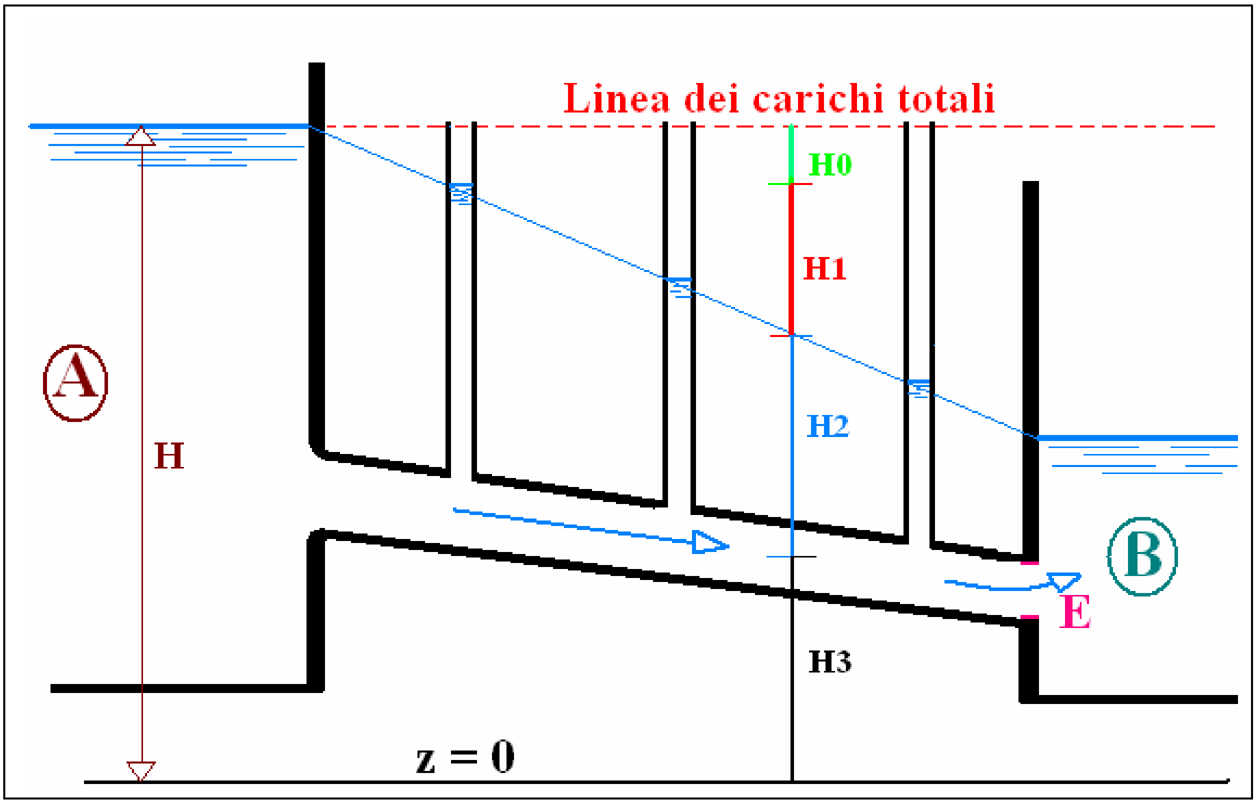
$$\mathbf{H} = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \textbf{costante}$$

Cioè: *nel moto permanente di un fluido perfetto, pesante ed incomprimibile, il carico totale si mantiene costante lungo ogni trajettoria.*

Nel caso di fluido reale, cioè non perfetto, l'energìa totale iniziale in parte viene dissipata, perché non appena il fluido si mette in movimento su di esso si maniféstano fenòmeni che tendono ad ostacolare il movimento stesso; la velocità, cioè, porta con sé il fenòmeno della resistenza al moto, dovuta alla viscosità del fluido, all'attrito contro le pareti del condotto ed alle eventuali irregolarità lungo il percorso.

Parte dell'energìa complessiva **H**, posseduta dal liquido nel serbatojo **A**, non si trasforma quindi in energìa 'di movimento' o 'di pressione', ma viene dissipata per vincere questa resistenza; così è che nel fluido reale l'energìa cinética, quindi la velocità e, di conseguenza, la portata è inferiore rispetto al caso ideàle del fluido perfetto.

Nel caso del fluido reale, il nostro schemàtico disegno così si modifica:



Le frazioni di energìa nelle quali si divide il carico complessivo iniziale **H** sono ora quattro: alle prime tre, nel caso di fluido perfetto, si aggiunge **H0**, che rappresenta l'energìa persa per le resistenze incontrate sino a quel punto, detta, per l'appunto, ***Pérdita di carico***.

Molte possono essere le cause per questa dissipazione, presente in ogni situazione dove vi sìa fluido in movimento. La teorìa e la conseguente quantificazione di questi fenòmeni di dissipazione dell'energìa, che riducono l'efficienza del moto di qualsìasi fluido (liquido o gassoso) ma anche di qualsivoglia oggetto che si muova in esso, òccupa, dal XVIII sécolo, ed ancòra occuperà gli studiosi di Idrodinàmica di ogni paese e di ogni tempo.

Ecco, quindi, uno dei più semplici problemi al quale si sono rivolte le eccezionali menti di Daniel I Bernoulli, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut e Jean le Rond d'Alembert, forti di tutti i progressi già còlti e conosciuti nella giovane Comunità Scientifica, per capìre come l'energìa di un fluido, generàta dall'accelerazione di gravità, si distribuisse in differenti componenti quando si generi il movimento del fluido stesso.

Daniel Bernoulli (Groningen 1700 – Basiléa 1782) nacque a Groningen, a metà del decennio che vide in quella città il padre, Jean I, professore di Matemàtica (la straordinaria genealogìa svizzera dei Bernoulli, che iniziò con Nicolas (1623 – 1708) è illustrata nel precedente Capitolo 12 – in essa, Daniel è indicato con Daniel I, per distinguerlo dal nipote Daniel II).

Il Bernoulli che qui seguiamo studiò con il padre, rientrato a Basiléa ad occupare la cattedra lasciata vacante dalla morte del fratello Jakob, zio di Daniel. Tra il 1725 ed il 1733 Daniel fu professore di Matemàtica a San Pietroburgo, durante un periodo segnato dall'improvvisa morte del suo fratello maggiore Nicolas II, anch'egli matemàtico.

Ecléttica fu l'attività di Daniel: si occupò di Càlcolo delle probabilità, di Economìa, di Astronomìa, di Medicina, di Fisica, di Fluidodinàmica dei gas e dei liquidi; per quest'ultimo aspetto giunse alle conclusioni che qui più interessano. A Daniel, singolarmente o unìto ad altri, furono riconosciuti dieci premi dalla *Académie royale des scienses*, per la soluzione di problemi dalla stessa istituzione proposti ai migliori matemàtici. Il primo di questi, ricevuto all'età di ventiquattro anni, sviluppava il disegno di una clessidra in grado di misurare il tempo su un naviglio nonostante le continue oscillazioni. Il terzo premio, condiviso con Euler e con il matemàtico scozzese Colin Maclaurin (Kilmodan 1698 – Edimburgo 1746), fu motivato dalla redazione di una dettagliata carta delle correnti marine. Un altro, che divise con suo padre, trattò dell'inclinazione delle orbite dei pianeti. In ciascuno di essi Daniel Bernoulli mostrò considerevoli abilità matemàtiche, una acùta percezione fisica e l'ingegnosità nel giungere alle soluzioni senza seguire un métodо predefinìto.

Molti degli scritti di Daniel Bernoulli trattarono della statica e della dinàmica dei fluidi, ma fu il suo "*Hydrodinamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii.*", scritto a S. Pietroburgo verso i trent'anni e pubblicato a Strasburgo nel 1738, che gli diede maggior fama.

La pubblicazione di questo lavoro e la vasta eco che ottenne acuìrono a tal punto il sentimento di competizione con il padre Jean I, che Daniel fu portato a pubblicare quasi con urgenza anche il trattato "*Nouvelle hydrauliche*", dove, contrariamente al padre, espresse grande ammirazione nei confronti di Newton. Daniel non si sposò, interrompendo, nel suo ramo, la 'produzione' di menti eccelse della famiglia Bernoulli.

Leonhard Euler (Basiléa 1707 – S. Pietroburgo1783) nacque a Basilea, figlio di un pastore luterano che era stato uno studente di Jaques I Bernoulli ed anch'egli un buon matematico.

Leonard studiò Matemàtica sotto Jean I Bernoulli, applicandosi, nel contempo, in Teologìa, Lingue Orientali e Medicìna, e fu un amico stretto dei figli di Jean I, Nicolas II e di Daniel I. Fu quest'ultimo, infatti, che lo raccomandò presso Caterina I di Russia che lo accolse a S. Pietroburgo, dove fu professore di Fisica alla locale Accadémia, nella quale succedette allo stesso Daniel I Bernoulli nell'insegnamento della Matemàtica, quando l'amico rientrò a Basiléa.

Euler passò sedici anni in Russia, durante i quali il clima e lo studio intenso gli causarono la cecità da un occhio (. . . cosa che gli riduceva le distrazioni dallo studio – così commentava questa menomazione fisica!).

Il potere sempre più dispòtico della zarina gli venne progressivamente in uggia e, nel 1741, accettò l'invito dell'imperatore Federico il Grande di trasferirsi all'Accademia *Socìetas Regia Scientiarum*, di Berlino che divenne, come già ricordato nel Capitolo 8, nel 1746 *Koniglische Preussische Akademie der Wisseschaften* (Accademia Reale Prussiana delle Scienze).

Euler non interruppe mai i contatti con l'Accademia di S. Pietroburgo, trasmettendo tutti i risultati dei proprî studi; vi tornò poi nel 1766, su esplìcita richiesta di Caterina II, e colà rimase sino alla fine della sua vita terrena.

Nonostante l'aggravarsi della vista, che poi si risolse nell'assoluta cecità, lo scienziato svizzero mai interruppe la fecondità del suo lavoro, grazie ad una memoria prodigiosa, con la quale, ormai privo della vista, seppe dettare le proprie analisi matematiche ad uno dei suoi figli e ad altri studenti.

Alcuni hanno criticato l'attività di Lehonard Euler giudicandola troppo 'limitata' alla pura Matemàtica, senza rapporti con la Fisica, per la quale, a quel tempo, l'interesse era assai vivo; miglior smentita di questa 'accusa' venne dall'elogio funebre del grande scienziato: un documento di ben cinque intere pagine dedicàte al solo elenco dei tìtoli dei suoi scritti in svariate materie: l'Álgebra (la convergenza delle serie infinite), la Geometrìa Analitica, la Trigonometrìa, il Càlcolo Infinitesimàle (includendo il primo completo trattato su questa materia), l'Ottica, la Meccànica, l'Idrodinàmica, le Macchine Idrauliche e, soprattutto, la Meccànica Celeste. In questa intensa attività, Leonhard Euler non trovò limitazione nel matrimonio né dai suoi tredici figli.

Alexis Claude Clairaut (Parigi 1713 – 1765), avviato agli studi matematici dal padre, scrisse il suo primo lavoro a soli tredici anni, sulla scoperta di quattro curve dalle quali poi compose il trattato delle curve a doppia curvatura che gli valse l'ammissione alla *Académie royale des scienses* a soli diciassette anni, divenendo così il membro più giovane nella storia di quella istituzione. I successivi studi di Clairaut, condotti assieme al matematico Pierre Louis de Maupertuis, stimolarono il suo interesse sul problema della forma geométrica del globo terrestre, tanto che nel 1736 tutti e due parteciparono ad una spedizione in Lapponia, con il proposito di determinare l'eccentricità della Terra dovuta allo schiacciamento ai poli.

Da elementi raccolti in questa spedizione Clairaut pubblicò, a Parigi nel 1743, un trattato di grande interesse per questa storia dell'Idraulica: "*Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrodynamique.*"

Inoltre, lo scienziato francese formulò le equazioni del moto della Luna, che gli valsero un premio dall'Accademia di S. Pietroburgo nel 1750, e calcolò l'effetto perturbativo di Saturno e di Giove sulla trajettoria dell'òrbita della cométa di Halley, prevedendone il ritorno al perielio nell'aprile del 1759. Contribuì notevolmente alla teorìa delle equazioni differenziali, dimostrando, tra l'altro, l'esistenza di un integrale singolare per l'equazione che porta il suo nome.

Jean-Baptise Le Rond d'Alembert, detto d'Alembert, (Parigi 1717 – 1783), nacque dalla nobildonna Madame de Tencin e dal cavaliere Destouche, generale di artiglierìa, ma da questi abbandonato sul sagrato della cappella di Saint Jean Le Rond, donde il suo nome.

Fu allevato da una famiglia di vetrai parigini, con l'aiuto di una piccola réndita garantita dal padre naturale. Potè così iscriversi al *Colléges des Quatre Nations*, fondato dal Cardinale Mazarìno, dove si dedicò allo studio del Diritto e della Teologìa che però abbandonò ben presto in favore della più congeniale Matemàtica, tornando a vivere presso i suoi amatissimi genitori di adozione.

Ammesso, a soli ventiquattro anni, alla *Académie royale des scienses*, della quale fu Segretario dal 1722, pubblicò nel 1743 un "*Traité de dinamique*" nel quale cercò di riconciliare il principio del momento e quello dell'energìa e propose la forma del principio del momento che oggi porta il suo nome:

"*Le equazioni del movimento di un sistema materiale (equazioni dinàmiche) si ottengono sostituendo, nelle relazioni che traducono l'equilibrio statico del sistema, alle forze attive la somma delle forze attive e delle forze di inerzia*."

Il suo successivo lavoro, del 1744, "*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides",* è un passo fondamentale nello sviluppo dell'Idrodinàmica.

Nel 1750 l'Accademia di Berlino promosse una competizione sulla teorìa del fenòmeno della dissipazione dell'energìa nei fluidi in movimento; d'Alembert fu tra quelli che inviarono la propria soluzione, ma l'Accademia decise di sospendere la decisione sino a quando i partecipanti non avessero dimostrato sperimentalmente le loro teorie. D'Alembert non si ritenne in grado di condurre questo còmpito addizionale, ma usò il suo documento come base al suo secondo trattato sul moto dei fluidi "*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides.*", che egli pubblicò nel 1752; questo lavoro riporta il nòto '*Paradosso di d'Alembert*':

"*La risultante delle azioni dinàmiche su un corpo in movimento in un fluido perfetto è nulla*."

L'aspetto paradossale di questo teorèma nasce dall'esperienza comune: una nave deve essere continuamente spinta per poter procedere; ma l'esperienza, comune esclude, per la sua stessa natura, che il fluido, nel quale la nave procede, sìa perfetto, quindi non reale; infatti, il risultato delle equazioni del moto risolte dal d'Alembert si basa sul fatto che il fluido sìa perfetto, cioè privo di alcuna forza di resistenza al moto e quindi di qualsivoglia pérdita dell'energìa iniziale. Sembra, in questo, ricordare i *moti vorticosi* perpetui che, secondo Descartes, muovevano i pianéti.

Altre sorprendenti méte raggiunse Jean-Baptise Le Rond d'Alembert: condusse l'analisi matemàtica del moto del vento, utilizzando un sistema di equazioni differenziali, presentato nel lavoro '*Théorie des vents'* (1745); studiò i fenomeni delle vibrazioni e del suono; risolse il problema della precessione degli equinozi.

In tanto lavoro il francese trovò molti motivi di soddisfazione nel ricevere, rifiutandole, allettanti offerte da entrambi i regnanti di Russia e di Prussia.

D'Alembert, assieme a Diderot, fu coeditore della "*Enciclopedia o Dizionario ragionato delle scienze, delle arti e dei mestieri.*", una stupenda rassegna (17 volumi oltre 18 tavole, con supplementi ed illustrazioni) della conoscenza umana, vista dalla cultura francese della metà del XVIII sécolo. Il contributo di D'Alembert non fu solo nelle scienze e nella cultura; fu anche un grande filòsofo, tra i più importanti esponenti dell'Illuminismo francese ed uno dei padri ispiratori della Rivoluzione Francese.

Ecco di quali 'grossi càlibri' ci dobbiamo ora occupare!

L'orìgine dell'Idrodinàmica fu attribuita a Daniel I Bernoulli, per la quale egli utilizzò per primo il términe latino *"Hydrodinamica"*, nel suo trattato del 1738 "*Hydrodinamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii."*, trovandosi, in questo, in disaccordo con il d'Alembert che, nella sua "*Enciclopedia*", sostenne che '*Idrodinamica*' non differisse da '*Idraulica*'.

Tuttavia Bernoulli sembra essere stato il primo ad aver ricondotto le leggi del movimento dei fluidi in princìpi sicuri e non arbitrari, cosa che nessun autore in Idraulica aveva fatto prima. Sebbene il trattato '*Hydrodinamica . . .*" appaja più vicino alla tradizionale Idraulica che alla moderna Idrodinàmica, dando così un po' di crèdito al giudizio di d'Alembert, sicuramente esso differì assai dai precedenti testi, tant'è che oggi gli è riconosciuto il carattere di prima òpera di questo nuovo capitolo dell'Idraulica.

Nonostante l'importanza di quest'òpera e la fama oggi celebrata del uso autore, chiunque vada cercando in quelle pagine l'esplìcita formulazione del *Teorema di Bernoulli*, come l'abbiamo già introdotta, cercherebbe invano.

L'analisi di questo libro è comunque indispensabile.

Dopo un lungo capitolo di introduzione, che riassume i precedenti lavori ed il contenuto del libro stesso, venti capitoli trattano dei seguenti temi:

- equilibrio dei fluidi in quiete;
- velocità dell'efflusso;
- misura del tempo;
- efflusso sotto un carico costante;
- oscillazioni nei fluidi;
- conservazione dell'energìa;
- perdita dell'energìa;
- macchine idrauliche;
- moto dell'aria e di altri fluidi;
- vòrtici e liquidi in moto in contenitori;
- statica idraulica;
- reazione dei fluidi.

Nell'affrontare questi diversi argomenti, Daniel Bernoulli introdusse molti concetti che costituirono allora novità assolute ma che oggi sono difficilmente associati al suo nome; per esempio:

- fu il primo ad utilizzare il piezometro aperto nella parete delle condotte per la misura della pressione (nell'àmbito dell'Idraulica statica);
- per primo presentò le soluzioni per la forma della superficie libera e delle superfici in pressione costante in contenitori soggetti ad accelerazione e a rotazione;
- generalizzò il problema, introdotto da Newton ed esteso dal padre Jean I Bernoulli, dell'oscillazione dell'acqua in tubi comunicanti, tenendo il periodo del pendolo semplice come riferimento temporale;
- per primo discusse della graduale stabilizzazione del flusso in una tubazione lunga;
- per primo fece accenno alla possibilità della propulsione a getto delle navi, sebbene l'efficacia di questo concetto fu piuttosto limitato avendolo ipotizzato soltanto in términi della reazione prodotta dal flusso di acqua che usciva a getto da un serbatoio.

Daniel Bernoulli dimostrò d'aver pienamente esperimentato l'evidenza delle sue analisi, dichiarando con orgoglio che i *test* erano stati eseguiti con rigore e ripetutamente e, prima d'essere annunciati, verificati nella loro corrispondenza alla teorìa.

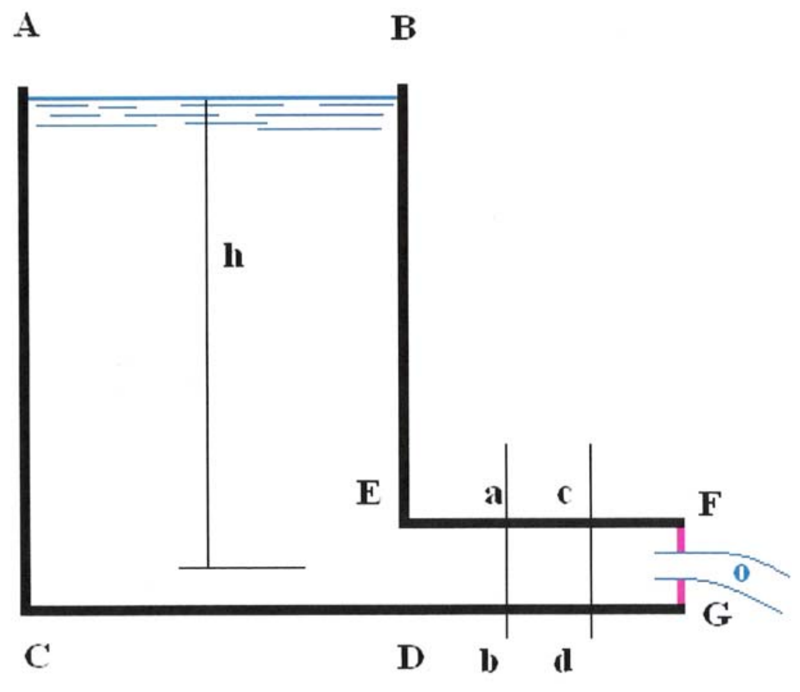
Resta qui di maggior interesse la vicenda legata alla scoperta di ciò che oggi è chiamato '*Teorema di Bernoulli*'; egli partì dal princìpio della conservazione dell'energia di Huygens e di Leibniz, la *vis viva*, assumendo il fluido come fosse costituìto da una serie di elementi discreti, distribuìti attraverso la sezione della corrente; così scrisse:

" . . . ma ora noi possiamo finalmente giustificare i princìpi che abbiamo così spesso menzionato. Il primo è quello della ***conservazione delle forze vive, . . .*** *dobbiamo aggiungere un'altra ipotesi: immaginiamo il fluido essere diviso in strati perpendicolari alla corrente; noi assumiamo che ogni particella di ogni strato si muova con la stessa velocità, così che ovunque la*

velocità del fluido è inversamente proporzionale alla dimensione della sezione. Questa ipotesi è stata spesso usata, anche se è stato dimostrato in un altro contesto che il movimento del fluido è un poco più lento lungo le sponde che in mezzerìa; questo risulta a causa dell'attrito, ma qualcuno potrebbe portare altre eccezioni; tuttavia un errore evidente può emergere soltanto in rarissimi casi da questa approssimazione."

Sebbene Leibniz avesse mostrato la "*forza viva*" essere proporzionale alla massa ed al quadrato della velocità, il fattore ½ non era ancora introdotto nel términe oggi conosciuto come *energia cinética* $\frac{V^2}{2g}$; questo necessariamente portò ad ambiguità nei calcoli del Bernoulli; egli, però, ebbe lìdea geniale di aggirare queste difficoltà, come si vede dalla sua valutazione della pressione in un condotto chiuso, che riportiamo integralmente in quanto in essa si assiste alla nàscita dell'ìdea che poi, grazie al contributo d'altri, rese a lui solo la più gran fama eterna:

"*Assumiamo un vaso di assai grande sezione* **ACDB**, *che è mantenuto costantemente pieno di acqua, collegato, alla base, da un tubo* **EFGD**. *All'estremità del tubo è posto un orifizio* **o**, *attraverso il quale il fluido esce con una costante velocità. Ricerchiamo la pressione esercitata sulla parete del tubo* **EFGD**.



Sia **h** *l'altezza dell'acqua della superficie libera* **AB** *del vaso sopra l'orifizio* **o**. *La velocità di efflusso dell'acqua, una volta che il flusso si è stabilizzato, è costante ed uguale alla radice quadrata di* **h**, *finchè noi assumiamo che il vaso rimanga sempre a livello costante. Se* **n** *è il rapporto tra la sezione del tubo e quella dell'orifizio* **o**, *la velocità dell'acqua nel tubo sarà pari al rapporto* $\frac{\sqrt{\mathbf{h}}}{\mathbf{n}}$.

Se il tubo, nel punto **FG**, *non avesse alcun restringimento, la velocità dell'acqua nel tubo sarebbe pari a* $\sqrt{\mathbf{h}}$, *che è maggiore di* $\frac{\sqrt{\mathbf{h}}}{\mathbf{n}}$.

Così l'acqua nel tubo tende a una maggiore velocità ma essa è impedita dal restringimento dovuto all'orifizio **o**. *Qui risalta la pressione che è trasmessa sulla parete del tubo* **EFGD**.

La pressione sulla parete è così proporzionale all'accelerazione che il fluido subirebbe se l'ostacolo scomparisse istantaneamente, lasciando la sezione terminale esposta alla sola pressione atmosferica. Ogni cosa prende posto come se, durante il flusso verso l'orifizio **o**, *il tubo* *fosse tagliato istantaneamente e si determinassero le accelerazioni che la porzione* **abcd** *riceverebbe . . . . Così noi possiamo considerare il vaso* **ABEabDC** *e trovare, con il suo aiuto, l'accelerazione che la particella, avente la velocità pari a* $\frac{\sqrt{\mathbf{h}}}{\mathbf{n}}$ *avrebbe ricevuto* [dall'istantànea rimozione del restringimento in **o**].

Prendiamo **v** *quale velocità variabile dell'acqua nel tubo* **ED**, **n** *la sezione del tubo,* **l** *la sua lunghezza =* **Ec**, **dx** *la lunghezza di* **ac**. *L'acqua avanza nel tubo in* **ED** *ma, allo stesso momento, una parte di fluido attraversa lo spazio* **abcd**.

L'acqua in **ED**, *la cui massa è* **n dx**, *acquista la velocità* **v** *che è pari alla forza viva* $\mathbf{nv^2dx}$, *che è generata nella sua interezza.*

In effetti, assunta assai grande la sezione del vaso **AB**, *la goccia in* **ED** *non possiede alcuna velocità prima di entrate nella tubazione.*

Per questo alla forza viva $\mathbf{nv^2dx}$ *deve essere aggiunto l'aumento della forza viva che l'acqua riceve tra* **ED** *e* **ab,** *che è* **2nlv dv**. *La somma è uguale al* ***reale carico* h *che*** *è quindi:*

$$\mathbf{nv^2dx + 2ncv}\,d\mathbf{v = nh\,dx}$$

oppure

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{h - v^2}}{\mathbf{2l}}$$

Durante il moto, l'aumento **dv** *della velocità è proporzionale alla pressione prodotta nel tempo* $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{v}}$. *Dunque, in questo caso, la pressione su ogni elemento di fluido è proporzionale alla quantità* $\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}$, *che è pari a* $\frac{\mathbf{h - v^2}}{\mathbf{2l}}$.

All'istante in cui il tubo viene tagliato, la velocità è $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{\mathbf{h}}}{\mathbf{n}}$ *oppure,* [elevando i términi alla seconda potenza] $\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{n}^2}$. [Utilizzando $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{n}^2}$ al posto di $\mathbf{v}^2$, esso] *può essere sostituito nell'espressione* $\frac{\mathbf{h - v^2}}{\mathbf{2l}}$ *che diventa* $\left(\mathbf{n}^2 - 1\right) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2n^2l}}$, [nuova espressione del fattore al quale è proporzionale la pressione].

Se l'orifizio fosse infinitamente piccolo, oppure **n** *infinitamente grande . . . , è evidente che l'acqua eserciterebbe integralmente la pressione corrispondente all'altezza* **h** *. . .*

Ma poi **1** *svanisce in rapporto a* $\mathbf{n^2}$ *e la quantità alla quale la pressione è proporzionale diventa* $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2l}}$ *. . . . Se la quantità* $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2l}}$ *corrisponde alla pressione* **h**, *la pressione corrispondente alla quantità* $\left(\mathbf{n}^2 - 1\right) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{2n^2l}}$ *sarà* $\left(\mathbf{n}^2 - 1\right) \cdot \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{n}^2}$, *una quantità che è indipendente da* **l**, *c.v.d..*"

Con parole nostre, Daniel Bernoulli dimostra così che la pressione di un fluido in movimento all'interno di una tubazione dipende dal suo diametro a dal carico idraulico ma non dalla lunghezza del tubo stesso; quindi, velocità e pressione dipendono entrambi da queste due sole comuni grandezze.

Questa è la base analìtica di partenza che porterà a quello che oggi è chiamato, ingiustamente, *Teorema di Bernoulli*.

Siamo infatti ancòra da esso distanti: innanzitutto lo scienziato svizzero evidenziò la sola proporzionalità delle grandezze in gioco nel moto di un fluido e non la loro esatta misura (omettendo l'accelerazione di gravità g nonché, come già abbiamo visto, il fattore ½ nel valore dell'energìa cinética). Inoltre, in nessuna circostata Daniel Bernoulli ipotizzò la costanza della somma dei tre termini associati nella formula

$$\mathbf{H} = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \textbf{costante}$$

. . . . che oggi porta il suo nome.

Infatti il princìpio che Daniel Bernoulli utilizzò comprese solo i due términi di velocità e di posizione, mentre la pressione poteva essere valutata soltanto attraverso l'ingegnoso sotterfugio fisico-matemàtico che abbiamo ricordato.

In realtà, Bernoulli assunse, come Huygens e come Leibniz avevano fatto con i corpi che cadono sotto l'azione gravitazionale, che la somma di ciò che oggi noi chiamiamo energia potenziale ed energia cinética rimanesse costante, ma non era ancora disponibile il princìpio che, in un fluido in moto, il lavoro è realizzato ovunque dalle variazioni della pressione in coincidenza con la variazioni dell'energia potenziale e dell'energia cinética.

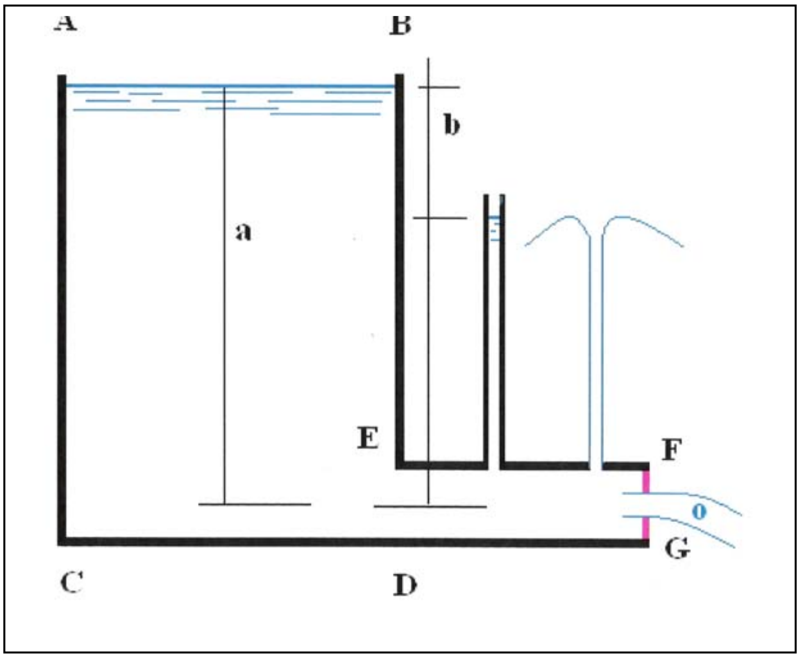
Così la vera ragione del suo artificio di immaginare il tubo istantaneamente tagliato, dipendeva dalla necessità di formulare (per la prima volta) l'equazione differenziale dell'accelerazione per valutare la pressione esercitata su un elemento fluido.

Daniel Bernoulli proseguì nella sua analisi con alcune conclusioni che ne dimostrano la mancanza di completezza:

"*Per calcolare l'azione dell'acqua in modo generale, chiamiamo* **v** *la velocità dell'acqua in un punto ed in un tempo nei quali si desidera conoscere l'azione; se si assume che la velocità corrisponde con l'altezza* **b**, *la pressione sarà* **(a-b)**.

Così . . . è possibile definire la pressione che si ottiene in ogni istante.

Da questo non è difficile predire le leggi dell'idraulica-statica, assumendo ogni forma del vaso ed ogni velocità ovunque. La pressione dell'acqua sarà sempre uguale alla quantità **(a-b)**, *dove* **a** *è l'altezza corrispondente alla velocità con la quale l'acqua emergerebbe da una apertura verticale dopo un infinito tempo, il vaso rimanendo pieno, e la velocità corrisponde all'effettiva velocità. È veramente curioso che una così semplice legge di natura sia stata ignorata sino ad oggi . . .*"



Evidentemente era errata l'ipòtesi che il livello nel piezometro indicasse il valore della quota che il getto d'acqua avrebbe raggiunta togliendo il manometro e lasciando l'orifizio aperto; tuttavia l'idea era nuova e corretta; inoltre, Daniel Bernoulli era anche consapevole dell'effetto della perdita di energìa nel moto dei fluidi, alla quale diede l'interpretazione di trasferimento di energìa ad un '*sottile materiale*':

"*. . . Questo è esattamente ciò che uno trova quando studia il movimento dell'acqua, caso nel quale è evidente che una parte del* ***potenziale ascendente*** *è persa continuamente; questo fatto deve sempre essere tenuto in considerazione . . . Perciò non è senza precauzione che io uso il nostro princìpio, ed in questa maniera si scopriranno molte cose sconosciute, non solo circa il movimento dei fluidi ma anche circa le loro pressioni, che possono sembrare stupefacenti ma che nessuno potrebbe facilmente aver predetto o anticipato . . . se le analisi non fossero state sviluppate come lo sono ora. Ma da quando è chiaro che, attraverso la natura delle cose, l'intero* ***potenziale ascendente*** *non è conservato, e sino a quando nessuno potrà definìre quanta parte di esso sarà dissipata, non si potrà determinare il movimento dei fluidi con sufficiente precisione . . . così io credo che il lettore sarà prudente nel dedurre i corollari dalla nostra teorìa . . .*"

Dell'applicazione di Daniel Bernoulli del princìpio della conservazione dell'energia, d'Alembèrt ebbe a scrivere:

"*Daniel Bernoulli . . . non da alcuna prova della conservazione della forza viva dei fluidi, sebbene abbia considerato il fluido come un aggregato di piccole particelle elastiche che si premono reciprocamente, cosicchè la conservazione delle forze vive sìa valida, come ciascuno sa, nell'impatto di un tale sistema di corpi. Mi sembra che una tale prova possa essere stimata avendo una grande costanza; anche l'autore non sembra aver dato tale prova eccetto una sola induzione. Mi è quindi sembrato che era necessariamente da provare in una più chiara ed esatta maniera il principio così come applicato ai fluidi.*"

Questo princìpio, soltanto impostato da Daniel Bernoulli, partì dalla percezione che in un sistema di corpi in movimento, come può essere considerato un fluido costituito da " *. . . piccole particelle elastiche . . .*", agisce una forza prodotto della massa per la sua accelerazione complessiva (o, meglio, per l'accelerazione del baricentro del sistema, come insegnò Pierre Varignon).

Cosicchè il movimento è il risultato della somma tra tutte le forze applicate al sistema, sìa interne che esterne; se le forze interne sono in equilibrio fra loro, la forza effettiva corrisponde alla sola forza esterna.

Nel caso dei fluidi, oggi sappiamo, l'accelerazione di gravità (forza esterna) prevale e genera il moto quando e nella misura in cui essa sùpera le forze che rappresentano la resistenza al movimento, che è una forza interna.

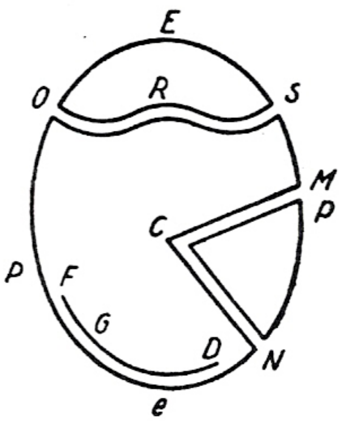
Oggi, questo *Principio di d'Alembert* è ricondotto al generale problema dell'equilibrio statico tra le forze esterne e le forze interne alle prime opposte (sforzi), ma è una méta non raggiunta dal francese, che stimò il suo princìpio solo dinàmico, con il quale cercò semplicemente di trattare la proprietà della conservazione della forza d'inerzia delle masse in movimento in rapporto alle altre forze dalla prima indipendenti.

D'Alembert affermò di aver provato questo Princìpio e di aver verificato la sua applicabilità all'efflusso da un contenitore nel suo "*Traité de dynamique*".

La dimostrazione fu ripetuta nel suo "*Traité de l'equilibré et du mouvement des fluides*", ma come corollario del suo generale princìpio della dinàmica; in ogni caso egli condivise l'ipòtesi di Daniel Bernoulli di considerare il fluido come suddiviso in piccoli strati, tranne che nel caso di bruschi cambi di sezione.

"*Devo ammettere che i risultati delle mie soluzioni sono in accordo con quelli di Daniel Bernoulli. Tuttavia in un piccolo numero di problemi esiste l' eccezione, come nel caso in cui un capace geometra utilizzi il princìpio della conservazione della forza viva per determinare il movimento di un fluido nel quale ci sono punti nei quali la velocità aumenta istantaneamente da una quantità finita* [come, ad esempio, in un brusco cambio di sezione]."

Nello stesso anno nel quale il trattato di d'Alembert sulla Dinàmica venne pubblicato, Alexis Claude Clairaut presentò lo studio della forma della Terra, che contribuì allo sviluppo dell'Idrodinàmica, perché la sua analisi si sviluppò trattando il globo terrestre come un corpo rotante ancòra allo stato liquido, soggetto a rotazione, prima di diventare sòlido; in tal caso . . . :

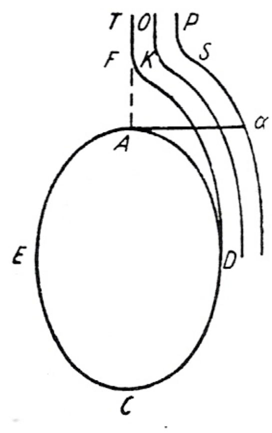


"*Fino a che l'intera massa è considerata in equilibrio, ogni porzione del fluido può diventare solida senza che la parte rimanente cambi la sua condizione. Supponiamo che l'intera massa solidifichi ad eccezione di quella parte fluida necessaria a formare il canale ORS: questo canale sarà quindi in equilibrio; ma questo potrebbe accadere soltanto se la tendenza per OR di muoversi verso RS fosse uguale a quella di SR di muoversi verso R O.*"

Clairaut mostrò inoltre che le stesse considerazioni precludevano la formazione di correnti all'interno di un canale avente la forma di un circuito chiuso, a dispetto delle sola gravità o della combinazione di gravità e forza centrifuga prese assieme.

Attraverso il càlcolo infinitesimàle, egli dimostrò che la forza gravitazionale poteva essere scomposta in tre direzioni, secondo un riferimento cartesiano, la cui variazione, nello spazio, era esprimibile utilizzando equazioni differenziali. Queste ultime erano la via per dimostrare che la forma della Terra, un'ellissoide, costituìva il sòlido di riferimento per l'equilibrio di una massa fluida in rotazione.

Nel suo "*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides.*" d'Alembert cercò di adattare l'analisi di Clairaut al moto generale dei fluidi. Egli per primo considerò i fluidi come fossero composti da un gran numero di particelle in movimento libero l'una rispetto all'altra ma – come in un equilibrio statico – in grado di trasmettere uguale la pressione in tutte le direzioni, secondo il *Princìpio di Pascal* (vedi al Capitolo 11). Ammettendo l'impossibilità di prevedere il dettaglio della distribuzione delle particelle, al fine di potere ad esse applicare il proprio princìpio della Dinàmica, le considerò come se costituissero un corpo solido.



D'Alembert così procedette alla valutazione di dettaglio delle forze esercitate sopra un corpo, di forma ovale, immerso nella corrente fluida, valutando l'accelerazione e la decelerazione che l'ostacolo provocava nelle particelle.

Lo scienziato francese fu il primo ad introdurre concetti come: le componenti della velocità e dell'accelerazione del fluido; i differenziali che esprimono la continuità; i numeri complessi, essenziali per la moderna analisi del problema.

Come Newton fece per il moto dell'efflusso da un orifizio (vedi Capitolo 11), d'Alembert erroneamente assunse che nella zona frontale di un corpo immerso in un flusso ci fosse una zona di fluido fermo, che évitava, altrimenti, una variazione della direzione della velocità che riteneva eccessiva. Diversamente da Newton, tuttavia, egli considerò le condizioni del fluido nella parte posteriore del corpo immerso indipendenti da quanto succedeva nella zona frontale. Nonostante ciò, d'Alembert si rese conto d'essere giunto alla irragionevole conclusione che la somma delle pressioni elementari esercitate su ogni parte della superficie del corpo fosse nulla. Ecco come manifestò la propria perplessità:

"*Così io non vedo, lo ammetto, come si possa soddisfacentemente spiegare, attraverso la teoria, la resistenza dei fluidi; al contrario mi pare che la teoria, con tutti i rigori, dìa in molti casi resistenza nulla; un singolare paradosso che lascio, per la sua risoluzione, ai futuri geometri.*"

Jean-Baptise Le Rond d'Alembert stava dando vita ad una nuova scienza: l'Aerodinàmica.

Egli, infatti, continuò la sua ricerca sul problema della resistenza incontrata dagli oggetti in movimento in un fluido, erroneamente assumendo che il flusso intorno ad un corpo, che si muove ad una velocità variabile, potesse essere considerato come successione di tempi nei quali la velocità fosse costante; di conseguenza concluse che gli effetti di inerzia del flusso potevano, in alcune circostanze, svilupparsi con la seconda potenza della velocità, come fosse essenzialmente semplice variazione dell'energìa cinética; inoltre assunse che la "*superficie di scorrimento*" potesse invariabilmente essere proporzionale alla stessa velocità ed anche ipotizzò una caratteristica del fluido, che chiamò "*tenacità*", come costante e quindi indipendente dalla velocità.

Enérgìa cinética, *Superficie di scorrimento* e *Tenacità* erano, per d'Alembert, le tre grandezze nella quali si manifestava la resistenza al moto degli oggetti nei fluidi, proporzionali, rispettivamente, alle potenze 2, 1 e 0 del valore della velocità relativa.

Gli aspetti di Idrodinàmica analizzati dal d'Alembert restano di particolare interesse, a causa della nuova prospettiva sul problema, già indagato con Daniel Bernoulli, circa la pressione esercitata da un liquido fluente sulla parete di un condotto in rapporto alla velocità del flusso.

Daniel Bernoulli aveva dimostrato, sia analiticamente che sperimentalmente, che la pressione potesse diventare negativa se la velocità si incrementava localmente di una quantità adeguata; d'Alembert sostenne, al contrario, che la pressione non poteva che essere sempre positiva anche se, in qualche punto del condotto, la presenza dell'acqua diventasse intermittente..

Il disaccordo era soltanto apparente: Bernoulli, infatti, stava parlando in términi di pressione relativa e d'Alembert, invece, di pressione assoluta. Quando quest'ultimo si consultò sull'argomento con Euler, ricevette la seguente diplomàtica (tuttavia perspicace) replica:

"*Io credo che le tue ragioni siano fondate come quelle di Bernoulli . . . Se il condotto è posto in uno spazio vuoto (senza aria), non c'è dubbio che l'acqua possa perdere la sua continuità quando la pressione diventa negativa. La tua teoria sarà così vera quando il condotto è posto nel vuoto e quella di D. Bernoulli è altrettanto equivalente quando il condotto è all'aria aperta.*"

I lavori di d'Alembert sul moto dei fluidi avrebbero senza dubbio ricevuto il plauso che meritavano se Euler non avesse, a sua volta, pubblicato nel 1755, appena tre anni dopo l'apparizione dell' "*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides.*" di d'Alembert, una serie di analisi che contemplava, ma in una forma molto più elegante, quasi tutto ciò che d'Alembert e Daniel I Bernoulli avevano definito.

La certezza che Leonhard Euler abbia potuto raggiungere tale successo senza beneficiare degli sforzi di Bernoulli, Clairaut e d'Alembert, è questione che può essere oggetto di sole congetture; tuttavia è certo che fu la sua òpera a fissare in modo conclusivo i princìpi della scienza Idrodinàmica, tanto è vero che le equazioni del moto dei fluidi oggi utilizzate differiscono poco da quelle che egli allora presentò.

Leonhard Euler, come d'Alembert, prese spunto dalla legge di Pascal:

"*L'uniforme propagazione della pressione attraverso l'intera massa del corpo del fluido . . ., dovuta al fatto che tutte le particelle sono soggette alla stessa pressione durante la fase di equilibrio, non è solo un fenomeno notevole, ma accerta l'unicità della caratteristica proprietà dei fluidi, che esiste in ogni momento nei fluidi mentre non esiste nei corpi solidi.*

Una delle principali ragioni, tuttavia, perché questa proprietà sìa considerata così importante, è che tutte le leggi dell'equilibrio e del moto dei fluidi possono essere derivate da essa in modo molto convincente, così che si giustifica il ritenere che ogni sostanza che ha quella proprietà debba necessariamente seguire queste leggi, sia essa in equilibrio oppure in movimento.

Il fatto che tutta la Statica e tutta la Meccànica dei fluidi possa essere fondata così solidamente su questa proprietà giustìfica l'accettazione della particolare natura dei fluidi.

Un'altra serie di spiegazioni sulla natura dei fluidi – per esempio l'estrema piccolezza e mobilità relativa delle loro particelle dovute alla mancanza di coesione – costituivano solo ipotesi, la verità delle quali non venne decisa dall'esperienza o dalla sperimentazione, perché essa consegue alla stessa interna natura dei fluidi . . ."

Euler così evitò tutte le speculazioni inerenti la struttura dei fluidi e la sua relazione del loro comportamento, riconoscendo soltanto le caratteristiche di pressione isotropica (Princìpio di Pascal) e conservazione della massa.

Di séguito procedette nell'investigare il moto di un fluido sotto una forza esterna con le componenti $\mathbf{P_x}$, $\mathbf{Q_y}$ ed $\mathbf{R_z}$ per unità di massa, ciascuna funzione delle coordinate spaziali (x, y e z) e temporale (t), mentre considerò la pressione isotropica tra le particelle come una funzione del solo spazio (x, y e z); la velocità del fluido, in ogni punto, era scomposta nelle sue tre componenti **u**, **v**, **w**, anch'esse riferire rispettivamente agli assi x, y e z.

Considerato un elemento di fluido, a forma di parallelepipedo, Euler definì le espressioni matemàtiche che rappresentavano le componenti della forza esterna e la pressione del fluido per unità di massa su due facce opposte dell'elemento stesso; poi eguagliò queste forze con le espressioni delle corrispondenti componenti dell'accelerazione, che sono le variazioni, nel tempo e nello spazio, delle componenti della velocità; egli così giunse alle tre equazioni chiamate *Equazioni di Euler*, che costituiscono l'espressione dell'equilibrio dinàmico di un fluido in movimento:

$$P_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p_x}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta u}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta u}{\delta z}$$

$$Q_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p_y}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta v}{dx} + v \cdot \frac{\delta v}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta v}{\delta z}$$

$$R_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p_z}{\delta t} = \frac{\delta w}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta w}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta w}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta w}{\delta z}$$

Euler anche generalizzò le equazioni differenziali di continuità, formulate dal d'Alembert, nella forma attualmente accettata per fluidi comprimibili, con particolare riguardo ai gas:

$$\frac{\delta p}{\delta t} = \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho V)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z}$$

. . . cioè: la variazione, nel tempo, della densità è uguale alla variazione della velocità, moltiplicata per la densità stessa, secondo le tre componenti cartesiane x, y e z.

Euler si rese conto sia della corretta impostazione di base della sua analisi ma anche dei suoi lìmiti, riconoscendo i mériti degli altri tre studiosi . . . :

"*. . . tuttavia sublìmi sono le ricerche sui fluidi per le quali noi siamo debitori ai signori Bernoulli, Clairaut e d'Alembert, che seguono così naturalmente dalle nostre due formule generali che non si può ammirare sufficientemente questo accordo tra le loro profonde meditazioni e la semplicità dei principî dai quali io derivai le mie due equazioni ed ai quali io mi riferii per i primi assiomi della Meccànica.*

Se noi non siamo capaci di ottenere una più completa conoscenza delle leggi del moto dei fluidi, non è per causa della Meccànica e la sufficienza dei princìpî ma solo perché l'analisi ci abbandona a questo punto . . . "

A dispetto della difficoltà della loro generale applicazione, Euler fu capace di dare alle sue equazioni una essenziale e vitale funzione: la rigorosa derivazione dell'equazione di Daniel Bernoulli.

Egli per primo assunse:

- il fluido incomprimibile, quindi con densità costante. Diventa così uguale a zero qualunque términe che esprima la variazione della densità nel tempo;
- il flusso in moto permanente, con la conseguenza che la velocità subisce variazioni solo nello spazio, cosicchè quelle nel tempo sono nulle;
- le quantità $Pdx + Qdy + Rdz$ e $udx + vdy + wdz$ essere differenziali esatti.

Euler giunse così a dimostrare che le sue tre equazioni dell'equilibrio dinàmico di un fluido in movimento potevano essere combinate nell'àmbito di una sola relazione:

$$\frac{p}{\rho} = \Omega - \frac{1}{2}v^2 - C$$

Esprimendo la forza potenziale $\mathbf{\Omega}$ quale prodotto negativo tra l'accelerazione di gravità g e la quota z e dividendo tutti i termini per $\mathbf{g = \frac{y}{\rho}}$, Lehonard Euler giungerà alla notissima forma, invece, quindi ingiustamente, attribuìta al solo Daniel I Bernoulli:

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \textbf{costante}}$$

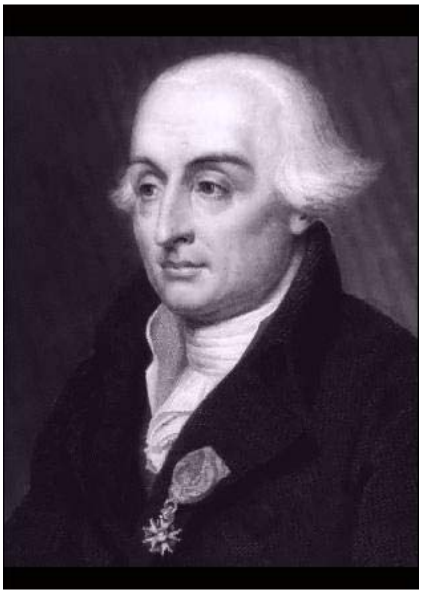
Un grande contributo all'estensione delle ricerche di Leonhard Euler fu assicurato dai grandi matematici Giuseppe Luigi Lagrange e Pierre Simon de Laplace.

Il primo, G.L. Lagrange, (Torino 1736 – Parigi 1813), nato a Torino da genitori francesi, colà educato nella tradizione classica e poi addentratosi negli studi matematici come autodidatta, fu docente di Matemàtica alla Scuola di Artiglieria del capoluogo piemontese dove fondò, assieme a G. Saluzzo e G. Cigna, una società di ricerca scientifica dalla quale ebbe origine l'Accademia Reale delle Scienze di Torino.

Dopo aver formulato la teoria dei massimi e dei minimi, dal quale prese origine il calcolo delle variazioni, nel 1766, su proposta di Leonhard Euler e di d'Alembert, fu chiamato da Federico II a dirigere l'Accademia di Berlino, dove trascorse vent'anni caratterizzati dalla fase più feconda della sua ricerca scientifica e matematica. Alla morte dell'imperatore tedesco accettò l'invito di re Luigi XVI di trasferirsi a Parigi, dove rimase sino alla fine.

Nella capitale francese G.L. Lagrange acquistò tale prestigio da prendere il posto di Lehonard Euler, alla morte di questi, quale matematico di riferimento per l'intero mondo scientifico. La sua fama gli valse l'indenne passaggio attraverso la Rivoluzione Francese e la Restaurazione, conservando inalteràti sìa le cariche che gli emolumenti. Presiedette la Commissione per l'introduzione del Sistema Metrico Decimale e, nel 1797, divenne professore all' Ecole Polytecnique, fondata in quell'anno. Anche lo stato napoleonico lo riconobbe quale persona di valore assoluto, nominandolo senatore, gran ufficiale della Legion d'Onore e conte dell'Impero; le sue spoglie mortali giacciono al Pantheon, tra i grandi di Francia.

La più importante òpera di Lagrange, "*Mécanique analytique*", fu pubblicata nel 1788; in essa furono completamente generalizzati sia il principio di d'Alembert sulla forza effettiva, sìa l'analisi di Leonhard Euler sull'accelerazione nei fluidi. Con riguardo al secondo problema, è interessante notare che, sebbene i due metodi alternativi di approccio proposti per la prima volta da Euler fossero stati entrambi perfezionati da Lagrange, l'analisi degli eventi osservati da un punto di riferimento fisso è generalmente chiamata '*Metodo di Euler*', mentre l'analisi del moto di un fluido considerando singole particelle è detta oggi '*Metodo di Lagrange*'.



Nel corso della sua analisi sul moto dei fluidi, Lagrange introdusse sia la *Velocità Potenziale* Φ sia la *Funzione della corrente* Ψ, concetti che diventarono di fondamentale importanza nel descrivere il modello di flusso, ma, come L. Euler, G.L. Lagrange riconobbe pienamente le limitazioni nelle relazioni matematiche allora disponibili:

"*Queste equazioni sono così complesse, proprio a causa della natura della materia, che la loro completa soluzione forse avverrà attraverso la potenza dell'analisi; oggi ci sono soltanto casi di sìngoli infiniti piccoli movimenti che sono suscettibili di un rigoroso calcolo.*"

Uno degli ultimi casi che G.L. Lagrange trattò fu il movimento di un'onda singola di altezza infinitesima in un canale a profondità finita **h**. Il suo nome è ancòr oggi associato con l'espressione, risultante della velocità di propagazione **v** di questo tipo di onda, detta anche '*Formula di Lagrange delle piccole perturbazioni*':

$$v = \sqrt{g \cdot h}$$

Relazione che possiamo così enunciare: le piccole perturbazioni del pelo lìbero in una corrente (onde), percorrono la superficie dell'acqua ad una velocità che è pari alla radice quadrata del prodotto dell'accelerazione di gravità g per la profondità dell'acqua stessa $\mathbf{h}$ (detta *Carico Idraulico* o, più frequentemente, *Battente*).

Pierre Simon Laplace (Beaumont-en-Auge1749-Parigi 1827) non fu da meno del suo contemporaneo G.L. Lagrange.

Nato in Normandia da genitori contadini, mentre era ancòra giovane fu notato dal d'Alembert per la sua precoce abilità di analisi. Grazie all'aiuto di questi, divenne nel 1767, quindi appena diciottenne, professore di Matemàtica alla Scuola Militare di Parigi e, nel 1773, fu ammesso alla *Académie royale des sciense*; in questo stesso anno ottenne la cattedra di Matemàtica all'*Ecòle normale Supérieure*, dove fu collega di G.L. Lagrange. Come quest'ultimo, anche Laplace passò indenne, per la sua chiara ed universale fama, attraverso travolgenti eventi che sconvolsero la Francia tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX sécolo; a differenza di Lagrange, però, non si astenne dall'attività politica, con costante successo nonostante l'alternarsi dei poteri che si succedettero: amìco e consigliere di Napoleone, che lo volle Ministro degli Interni (nel 1799) Senatore e Cancelliere del Senato (1803) e conte dell'Impero (1806), seppe 'recuperare' fiducia presso il re Luigi XVIII, dopo la Restaurazione, che lo fece Marchese e Pari di Francia nel 1814.

Nonostante i numerosi incarichi, è doveroso ricordare il giudizio che trasse di lui Napoleone: "*Matematico di primo ordine, Laplace rapidamente si rivelò un mediocre amministratore; egli portò nell'amministrazione lo spirito dell'infinitamente piccolo*."

Laplace pubblicò, nel 1796, l' '*Exposition du systhéme du monde'*, òpera di Astronomìa nella quale è enunciata la famosa sua ipòtesi, poi rivelatasi corretta, che il sistema solare si fosse formato da una primordiale nebulosa. Tra il 1799 ed il 1825 pubblicò i cinque volumi della sua celebrata "*Mécanique céleste.*", sorta di *summa* del sapere del tempo in Fisica ed in Meccànica, nella quale Laplace cercò di ricondurre ogni fenomeno nell'àmbito della teoria della Gravitazione Universale di Newton. Quest'òpera costituì il più significativo cambiamento di prospettiva portato alla scienza sin dai tempi di Cartesio, non tralasciando, nella trattazione scientifica, aspetti sino ad allora considerati squisitamente metafisici; a Napoleone, che gli rimproverava d'aver menzionato Dio Creatore soltanto una volta, Laplace replicò: "*Sire, non avevo bisogno di quell'ipòtesi*."

Laplace fu prezioso per l'Idrodinàmica, sviluppando potenti strumenti del càlcolo differenziale; importante, inoltre, il suo contributo nello studio delle onde, delle maree e delle forze capillari.

Ecco quindi nascere, nel XVIII sécolo, l'Idrodinàmica, branca dell'Idraulica che studia le forze in gioco nel moto dei fluidi, liquidi o gassosi.

Le applicazioni dei risultati di questa nuova disciplina, lo abbiamo visto nel caso delle ruote idrauliche, trovarono iniziali resistenze; pioniere di queste applicazioni pratiche fu Franz Josef Gerstner (Komotau, Boemia 1756-1832), ingegnere idraulico di notevole reputazione. Figlio di un pellaio, iniziò la carriera tecnica come assistente all'Osservatorio di Praga, dove avevano lavorato, tra molti, Tycho Brahe e Giovanni Keplero.

Gerstner insegnò Matemàtica all'Università di Praga; fondò l'Istituto Tecnico di Praga (del quale rimase direttore sino alla sua morte); infine operò come consulente nei maggiori progetti di canalizzazione allora realizzati in Europa. Scrisse su numerosi argomenti: Meccànica, macchine idrauliche, progettazione di dighe, moto delle onde.

Una delle ultime opere fu "*Theorie der Wellen*", pubblicata nel 1804, che contiene argomenti di nostro interesse; in essa, infatti, F. J. Gerstner indagò il moto dell'acqua nel caso di acque profonde, dimostrando che le particelle, nelle quali può essere scomposta la massa liquida in movimento, si muovono anche in profondità secondo un moto ondoso che riflette le oscillazioni della superficie; le trajettorie di ogni singola particella erano, infatti, circolari, decrescenti in diametro e con la profondità; la velocità di propagazione v, necessariamente comune a ogni famiglia di onde, era della forma:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

. . . dove λ è la lunghezza d'onda, cioè la distanza tra due punti di massimo, o di minimo nell'oscillazione.

La soluzione di Gerstern, prima applicazione dei nuovi strumenti matematici disponibili, sebbene criticata fu comunque una soluzione rigorosa, sìa per le ingegnose condizioni assunte sìa per l'ottima approssimazione raggiunta.

Se Lagrange mérita l'aver associato il proprio nome allo studio delle piccole onde in acque poco profonde, Gerstner sicuramente mérita altrettanto riconoscimento nell'aver enunciato la teoria delle onde elementari nell'acqua profonda.

L'applicazione della nuova scienza dell'Idrodinàmica ai problemi pratici del moto del fluido fu né fàcile né immediata, come del resto gli stessi Leonhard Euler e Giuseppe Luigi Lagrange avevano previsto e come, del resto, paventava d'Alembert:

"*La geometria, che dovrebbe obbedire solo alla fisica, quando unìta a quest'ultima a volte la domina. Avviene così che in una questione che noi stimiamo essere troppo complicata da permettere a tutti i suoi elementi di entrare nella relazione analitica che noi desideriamo costituire, noi rimuoviamo gli elementi più sconvenienti, li sostituiamo con altri elementi meno problematici, ma anche meno reali, e poi siamo sorpresi di arrivare, malgrado tutto, non senza un lavoro sofferto, ad un risultato contraddetto dalla natura; come se dopo averlo travestito, accorciato, tagliato, un puro meccanismo meccanico dovesse obbedire a noi stessi.*"

D'Alembert stesso dichiarò di aver evitato questa trappola, ma fu proprio il suo paradosso che diede orìgine alla tendenza di considerare poco le teorie della Meccanica dei Fluidi, separandosi così la schiera degli idraulici in due categorie: una costantemente dédita ad approfondire ed applicare rigorosamente la disciplina matematica e l'altra che privilegiava l'arte ingegneristica, applicando le teorie con assoluta 'parsimonia' se non con riluttanza; si generò quindi una frattura sempre più profonda tra gli scienziati (principalmente matematici e fisici) e i 'periti d'acqua', gli ingegneri.

Su questo aspetto prese posizione Bernard F. Bélidor (Parigi 1697 – 1761), nella sua '*Architecture hydraulique',* pubblicata a Parigi, in diverse edizioni, tra il 1737 ed il 1753, nella quale stilò una sintesi provvisoria delle conquiste raggiunte in Idraulica a quel tempo (lo abbiamo già incontrato nel Capitolo 10).

Contro il costume "*d'exalter la pratique au mépris des la théorie*", Bélidor prende nettamente posizione, affermando con decisione la necessità di far discendere da princìpi matematici i metodi "*pour opérer sûrement dans la pratique*".

In questo non fu meno categorico Antonio Lecchi (Milano 1702 – 1776) che rifiutava l'opinione 'volgare' secondo la quale ". . . *nell'affare dell'acque e de' fiumi la pratica è di gran lunga superiore alla teorica: che i soli pratici dovrebbero ascoltarsi senza intromettere i matematici, nati fatti alle sole astratte speculazioni di nessun pro l'umana Repubblica. Cotesta è una ràncida antichissima cantiléna, la quale si va rinnovellando ogni volta, che vi ricorrono le stesse circostanze, o d'ignoranza, o d'interesse, o d'emulazione, o di partito.*" ; così si esprimeva il gesuita nel suo '*Piano della separazione, inalveazione e sfogo de' tre torrenti di Tradate, Gardaluso e del Bozzente'* , pubblicato a Milano nel 1762.

Proprio questo contrasto tra teòrici e pratici fu uno dei motivi dominanti dell'Idraulica italiana del Settecento, pur non priva di notevoli contributi allo sviluppo della scienza dei fluidi, quasi a ristoro dell'improvvisa interruzione, avvenuta il sécolo precedente, della scuola italiana nata con Galileo.

*   *   *