Stefano Giovanni Loffi

Piccola
Storia dell'Idraulica

libera traduzione, ridotta ma integrata, di

"*History of Hydraulics*" di Hunter Rose e Simon Ince
dell'Istituto di Ricerca Idraulica dell'Università Statale dell' IOWA – U.S.A.,
édita, nel 1954, come supplemento, su "*LA HOUILLE BLANCHE*" .

Cap. 12 – Il Càlcolo Sublìme

Cremona 23 novembre 2006

Capitolo 12 – Il Càlcolo Sublìme

Non appena la nascente 'Scienza dei numeri' mostrò l'utilità delle prime pràtiche applicazioni, si manifestò un'esigenza pienamente soddisfatta soltanto nel XVII sécolo: descrivere, con i numeri, *il continuo* e la sua più intuitìva manifestazione, il *movimento*.

Lo scorrere dell'acqua è certamente un embléma della continuità del movimento e la sua interpretazione matemàtica, avvenuta nel '*Sécolo del lumi*', ha costituìto per l'Idraulica il momento cruciale del passaggio dalla conoscenza ancòra empirica-sperimentale alla trattazione matemàtica rigorosa dei fenòmeni osservàti.

Prima di affrontare questo nuovo balzo culturale della Storia dell'Idraulica, forse il vero discrìmine tra 'antico' e 'moderno', abbiamo voluto inserìre un Capitolo che tratti dell'evoluzione di quella parte della scienza matemàtica che ha sviluppato il càlcolo in grado di interpretare il continuo, il movimento; un càlcolo dalle caratteristiche talmente complesse, concettuali e strutturali, e dai successi così stupefacenti, rimuovendo ostàcoli in alcuni casi per millenni apparsi invalicàbili, da meritare l'originario appellativo di: *Càlcolo Sublìme*.

Nòto oggi come *Càlcolo Infinitesimàle*, questo potentissimo strumento matemàtico deve le proprie origini ad un problema che restò costante e presente sino al términe della sua evoluzione nel XIX sécolo: la 'quadratura' delle figure curve, cioè la capacità di misurare, o meglio di 'tradurre in numeri', una linea curva, prima fra tutte la circonferenza (o il cerchio), che delle curve è la regìna.

Nel quinto sécolo avanti Cristo il greco Ippòcrate di Chìo si pose, per primo, il problema della quadratura di linee curve, in particolare delle lùnule; ed ancòra nel XVII sécolo, di " . . . *quadratura del cerchio . . e . . di altre curve*" scrisse Jaques I Bernoulli, in una lettera a Gottfried Wilhelm Leibniz del 15 dicembre 1687, chiedendo lumi al matemàtico tedesco sulla sua " . . . *matemàtica più sublìme che finora non sono riuscito ancòra a penetrare* . . . ".

Duemila e duecento anni di ricerca per giungere al completo dominio delle linee curve!

In realtà i risvolti del Càlcolo Infinitesimàle furono, ovviamente, più ampî, ma resta il fatto che il primo ragionamento, che ad esso possiamo ricondurre come primo passo, si riferìva al problema di comprendere (in modo matemàtico) le linee curve; anche a questo scopo l'ésito finàle rese un perfetto servizio.

Ecco allora che ridurre la storia del Càlcolo Infinitesimàle con l'evoluzione della quadratura delle curve è, per certi aspetti, un azzardo; lo riteniamo però non privo di validità e di coerenza per chi, come noi, intende stendere un racconto comunque divulgativo per i non specialisti.

Sperare nell'indulgenza dei matemàtici è una risorsa da giocare ora!

Costruiremo il filo principale del nostro racconto, quindi, seguendo l'evoluzione dei sistemi, prima geométrici poi matemàtici, per la quadratura delle curve.

Esiste un'affinità, prima di tutto intuitìva, tra una qualunque linea curva ed il concetto di continuità: la curva, continua - cioè senza lìmite - oppure chiusa, una circonferenza o un'ellisse, ben rappresenta l'immagine di un percorso, senza interruzioni od ostacoli, lungo il quale possiamo immaginare di 'stendere' lo svolgersi di un fenomeno, di un movimento: lo scorrere dell'acqua, un flusso finanziario, . . . il consumarsi del tempo, il moto di un oggetto, la pressione del sangue, ...

Sin dall'inizio e sino al términe dell'ultima scoperta, ogni anàlisi si è rivolta ad un modello apparentemente sémplice: per conoscere le caratteristiche di una linea curva il modo più diretto, diremmo migliore, è riuscire ad approssimarla secondo una successione di segmenti rettilinei; più questi sono numerosi, e quindi di minor lunghezza, maggiore è l'approssimazione, cioè più ci si avvicina al valore esatto della curva indagata. Aumentando il numero dei segmenti che, seguendone il percorso, appròssimano la curva, minore è l'errore. Procedendo in tale direzione si può raggiungere il grado di approssimazione minore immaginabile, cioè accettabile per affermare di aver 'risolto' la curva e con essa avere la possibilità di 'trattarla' in modo matemàtico, che vuol dire non soltanto misurarla ma: trovarne il raggio di curvatura, la tangente, l'area racchiusa, la proporzionalità con altre figure, ...

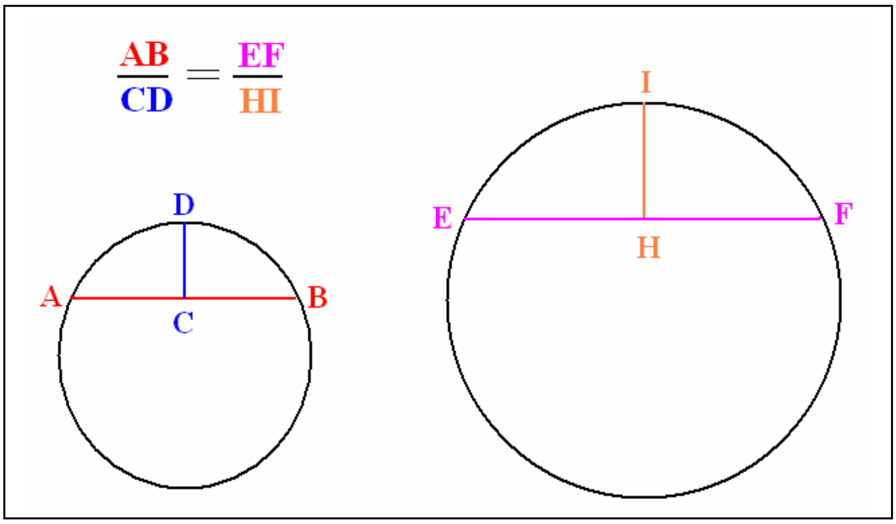
Il percorso inizia nella seconda metà del quinto sècolo a.C., naturalmente in Grecia,dove troviamo il primo studioso che risulta essersi impegnato nello studio delle linee curve: Ippocrate di Chìo (che non deve essere confuso con il suo contemporàneo Ippocrate di Coo, al quale molto deve la Medicina e che ogni médico ricorda nel pronunciarne, all'inizio della carriera, il giuramento).

Di Ippòcrate di Chìo non possediamo alcun testo; sappiamo che scrisse un trattato "*Elementi di geometrìa*", che probabilmente anticipava alcuni concetti poi resi universali da Euclìde nel suo "*Elementi*".

Del lavoro di Ippòcrate abbiamo una testimonianza indiretta dallo stòrico Simplìcio, vissuto nel quinto sècolo dopo Cristo, che afferma d'aver trascritto il testo "*Storia della Geometrìa e dell'Aritmética*" di Eudémo di Rodi, filosofo, allievo di Aristòtele, vissuto nel IV sécolo a.C..

In questo libro, Eudémo attribuisce a Ippòcrate di Chìo la scoperta di questo teòrema:

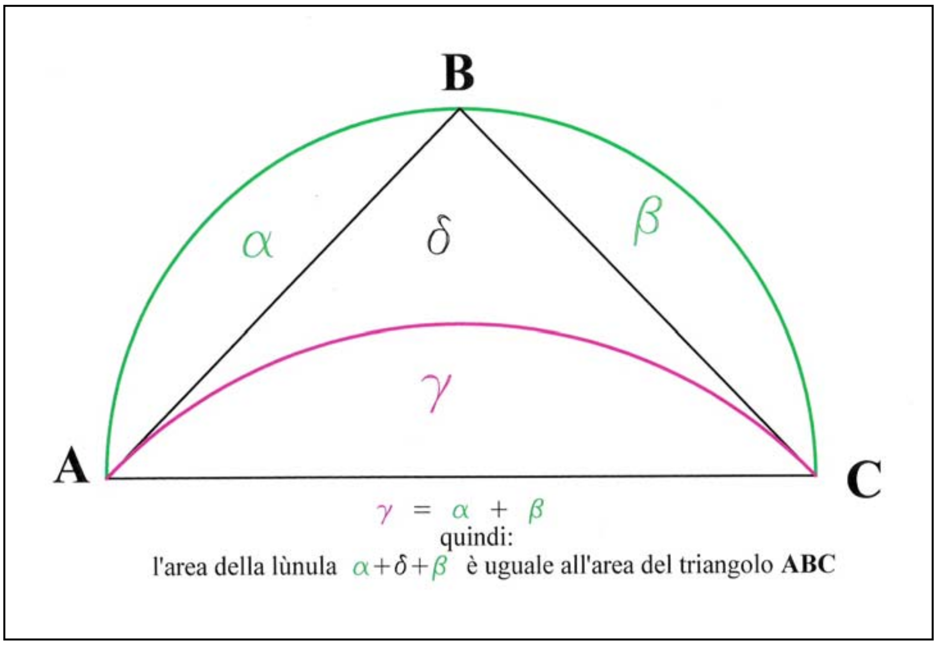
"*Segmenti di cerchio sìmili stanno tra loro come i quadrati costruìti sulle loro corde.*"



Ecco un primo passaggio da chiarìre: per *segmenti di cerchio sìmili* sono da intendere, come indicato nella figura a lato, segmenti che hanno lo stesso rapporto tra la freccia (**CD** e **HI**) e le rispettive corde (**AB** e **EF**).

Eudémo non dice come Ippòcrate seppe giustificare il fatto che le aree dei quadrati costruìti sulle corde **AB** e **EF**, che ne sono i lati di base, hanno il medésimo rapporto delle superfici dei due segmenti di cerchio **ADBC** e **EIFH**; la dimostrazione fu condotta successivamente, ad òpera di Eudosso di Cnido (408? – 355 ? a.C.) e poi di Euclìde nel libro XII del suo "*Elementi*".

Il fatto è comunque importante perché, partendo da questo teòrema, Ippòcrate di Chìo giunge alla prima quadratura di una classe di figure curvilinee: le lùnule.

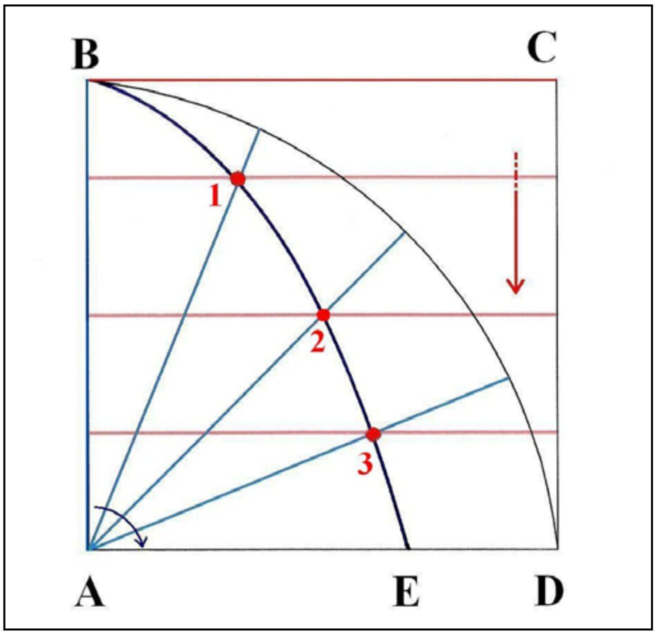


Una lùnula è una figura limìtata da due segmenti di cerchio in cui il minore sìa contenuto nel maggiore.

La prima e più semplice lùnula, della quale Ippòcrate rende la misura, è quella (che indichiamo, nel disegno a fianco, come formata da **α** + δ + **β**) ottenuta in un semicerchio nel quale sìa inscritto un triangolo isoscele rettangolo **ABC** (che è la metà del quadrato inscritto nel corrispondente cerchio). I due catéti, **AB** e **BC**, uguali del triangolo, indivìduano due segmenti di cerchio altrettanto uguali: **α** e **β**.

Sull'ipotenusa del triangolo, che è anche il diàmetro del semicerchio, Ippòcrate traccia un nuovo segmento di cerchio, **γ**, sìmile ai due staccati sui catéti.

Sfruttando la proporzione del teòrema suddetto, Ippòcrate dimostra che l'àrea della lùnula **α** + **δ** + **β** (cioè della figura compresa tra semicirconferenza del semicerchio e contorno del segmento costruìto sul diàmetro) è uguale all'area del triangolo **ABC**: ecco la prima 'quadratura di una figura curva", cioè l'aver dimostrato che l'area di una figura curva è uguale all'area di una figura 'rettilinea', perfettamente misurabile.



Entra ora in scena Ippia di Élide, contemporàneo di Ippòcrate ed anch'egli attivo ad Atene, del quale, pur non disponendo di lavori originali, sappiamo molto perché oggetto di numerosi commentatori, tra i quali lo stesso Platone.

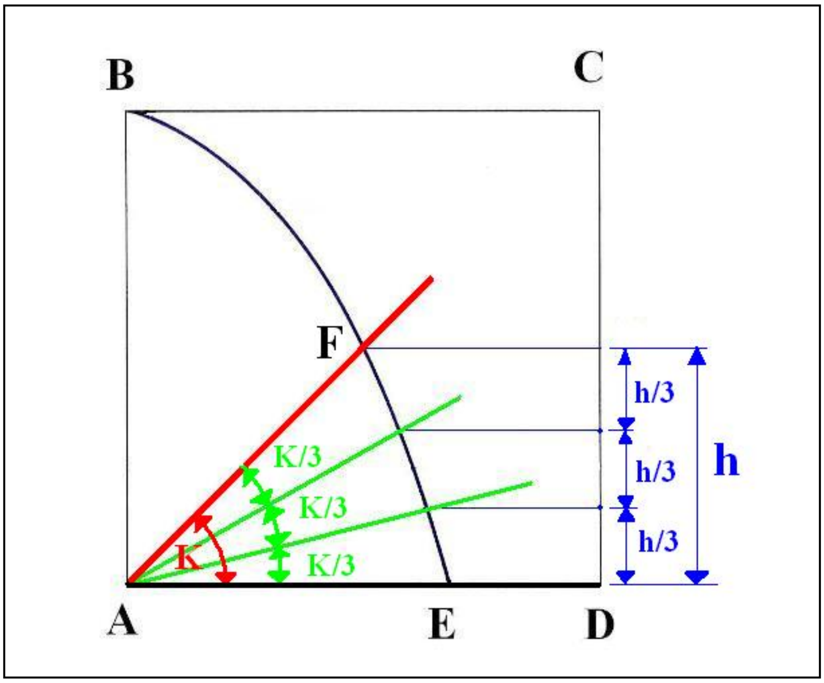
Ippia introduce, nella geometrìa greca, una novità, certo per quel tempo stravolgente: una nuova curva, diversa dalla circonferenza, ùnica consideràta sino ad allora, necessaria per risolvere un altro problema caro agli studiosi: la divisione in tre parti uguali di un àngolo, detta '*Trisecazione dell'àngolo*'.

Per costruire questa curva, per l'appunto chiamata "*Trisettrice di Ippia*", si deve immaginare di traslàre verso la base **AD** il lato superiore **BC** del quadrato e, contemporaneamente, far ruotare, sul vértice inferiore **A**, il lato verticale **AB**, alla stessa velocità, ovvero: il lato che trasla e quello che ruota giungono insieme a coincidere con la base.

Mentre questo dùplice movimento si compie, i due lati individuano diversi punti di intersezione (**1**, **2** e **3**) che, unìti, fòrmano la curva **BE**: la *Trisettrice di Ippia*.

Per dividere in tre parti uguali un àngolo **K** è così sufficiente dividere in tre parti uguali la parte **h** del lato del quadrato individuata dal punto di intersezione **F** del lato dell'àngolo con la curva trisettrice.

I due punti sul lato, projettati sulla trisettrice medésima, individuano gli àngoli, ciascuno terza parte dell'àngolo dato (**K/3**).



'Chiudiamo il cerchio', è proprio il caso di dirlo!, con Dinòstrato (IV Sécolo a.C.), allievo di Eudosso, che scopre un'importantissima applicazione della curva *Trisettrice di Ippia*: il lato del 'quadrato di Ippia', **AB**, è medio proporzionale tra l'arco del quarto di cerchio **BD**, inscritto nel quadrato stesso, ed il segmento che la curva Trisettrice stacca alla base del quadrato.

Con riferimento al disegno qui sotto riportato, possiamo quindi scrivere:

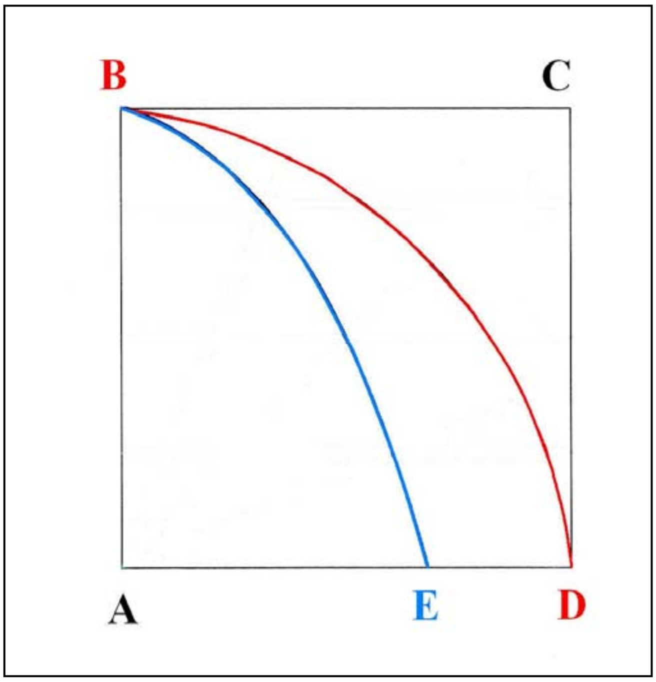
BD : AB = AB : AE

Cioè

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AE}$$

quindi

$$BD = \frac{AB^2}{AE}$$



Ecco, così, ottenersi la misura della quarta parte, **BD**, della circonferenza, quindi la misura della circonferenza: **BD** x 4.

Inoltre Dinòstrato dimostrò che il doppio di questa misura (quindi la metà della circonferenza) moltiplicato per il raggio dà la superficie del cerchio: eccoci giunti alla soluzione del problema di quadratura, per via geométrica, del cerchio.

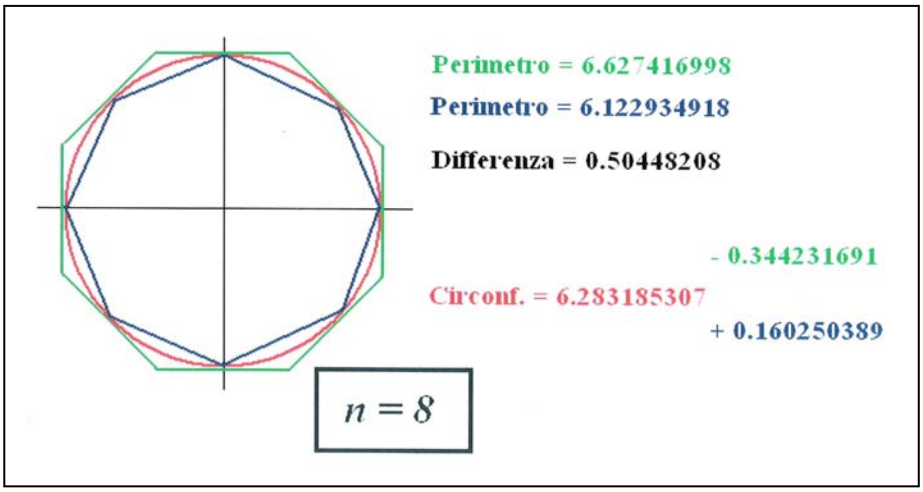
Prima Eudosso di Cnìdo e poi Archiméde di Siracusa (Siracusa 287–212 a.C.), giunsero per altra via alla quadratura del cerchio; una via matemàtica che già anticipava concetti e métodi di stupefacente modernità.

"*Considerata una qualsìasi grandezza, se da questa se ne sottrae una parte che sìa superiore alla metà si ottiene una nuova grandezza, minore della metà della precedente. Se da quest'ultima si sottrae nuovamente una parte superiore alla sua metà e così si procede quante volte si vuole, al términe delle sottrazioni si otterrà una grandezza che è sicuramente inferiore a qualunque delle grandezze precedentemente ottenute*."

Secondo questo enunciato è possibile giungere alla quadratura del cerchio.

È infatti sufficiente considerare il cerchio assieme a due poligoni regolari (che hanno quindi tutti gli àngoli ed i lati uguali tra loro), uno circoscritto e l'altro inscritto. Raddoppiando più volte il numero dei lati dei poligoni, la differenza delle aree tende ad essere sempre più piccola, sino a differìre di una quantità piccola quanto si vuole, che costituisce l'approssimazione con la quale è misurata l'area dello stesso cerchio.

Si 'comprime' cioè il cerchio, che è una lìnea curva, tra due polìgoni regolari, perfettamente misurabili, sino a quando la differenza delle loro aree diventa tanto piccola da potersi considerare insignificante; duemila anni dopo si dirà: *infinitesimàle*.



Con tale métodosi potevano così risolvere, certo non senza notevoli complicazioni, tutte le figure limitàte da lìnee o da supeficî curve.

Utilizzando due ottagoni, come nel disegno a fianco, che 'schiacciano' la **circonferenza** di raggio uguale ad uno, si ottiene una differenza tra le rispettive superficii pari a 0,50448208. Conoscendo, oggi, la misura della circonferenza, compresa tra i due ottagoni, vediamo che l'**ottagono circoscritto** ha un perimetro maggiore di 0,344231691, mentre l'**ottagono inscritto** ha un perimetro minore di 0,160250389; con poligoni di soli otto lati . . . l'approssimazione è assai grossolana!

Nel trattato '*Misura del cerchio*', Archiméde, 'schiacciando' la circonferenza con due polìgoni regolari (uno circoscritto e l'altro inscritto) di 96 lati, determinò il valore del rapporto tra circonferenza e diàmetro, oggi chiamàto π ('p greca') che doveva essere compreso tra i valori: 3 + 10/71 e 3 + 1/7, cioè tra 3,14085 e 3,14286, con un màrgine di errore compreso tra 0,00074 e 0,00127.

Apollonio, già citato, giunse ad una migliore approssimazione: 3,1416, con un errore dell'ordine di 0,00001.

Nel XVII sècolo questo procedimento fu chiamato *Método di esaustione*', per significare che si procede approssimando gradualmente la curva rendendo minima la differenza tra le aree del poligono circoscritto e di quellllo inscritto; tale differenza, quindi, si '*esaurisce*', cioè se ne compie l' '*esaustione*'. Archiméde, invece, utilizzava il términe di '*Schiacciamento della curva*' tra i due polìgoni che, aumentandone i lati, gradualmente la 'comprimono' sempre più, sino a giungere a differenze minime, . . . infinitesimàli.

Risolto il problema della quadratura del cerchio, quindi 'vinta' la regìna di tutte le curve, la geometrìa dell'antica Grecia cominciò ad inventare e risolvere innumerevoli altri tipi di curve, cominciando da: ellisse, parabola, iperbole, secondo i nomi dati da Apollonio di Pérge, o di Pérgamo (ca 262 – ca 180 a.C.).

Ossitòma, *orthotòma*, *amblitòma*: questa era la denominazione precedente, che pare doversi attribuire ad Euclìde, derivata dal pensiero comune che queste tre curve potessero essere ricavate soltanto dall'intersezione di un piano secante perpendicolarmente tre coni retti, tra loro distinti per il rispettivo differente àngolo al vértice (da ciò discende il genérico tèrmine di *Còniche*): angolo acùto → *ossitòma* (ellisse); angolo retto → *orthotòma* (paràbola); angolo ottuso → *amblitòma* (ipérbole).

Apollonio, probabilmente su suggerimento di Archiméde, coniò i términi che ancòr oggi utilizziamo, dimostrando che le tre curve potevano essere ottenute da qualsìasi tipo di cono, variando semplicemente l'inclinazione del piano che lo intérseca.

Archiméde di Siracusa fu senza dubbio il più rilevante protagonista delle prime 'esplorazioni del mondo delle curve', come testimòniano molte sue òpere ed in particolare: '*Della sfera e del cilindro*', '*Conòidi e sferòidi*', '*Sulle spiràli*' e la già citata '*Misura del cerchio*'.

Lo scienziato siracusano risolse con completezza la sfera, definendone non solo tutte le caratteristiche spaziali (volume, superficie, suddivisione in parti predefinite, ...) ma anche i rapporti tra questa ed i sòlidi ad essa inscritti o circoscritti.

Con Apollonio la grandezza della Geometrìa della Grecia antìca si compléta, ma di lui sono andate perdute quasi tutte le òpere, compreso '*Il tesoro dell'Analisi*', un testo enciclopédico per coloro che, assimilàti gli *Elementi* di Euclìde, avessero desideràto acquisire la capacità di risolvere le curve. Gran parte della sua òpera più importante, '*Còniche*', è giunta sino a noi attraverso la versione in àrabo dei fratelli Banū Mūsā (Muhammad, Ahmad e al-Hasan), priva, purtroppo, dell'ultimo libro, l'ottavo, irrimediabilmente perduto.

Nel trattato '*Còniche*', ed in particolare nel libro V, lo stesso Apollonio sembra credere d'aver raggiunto il completamento della conoscenza di ogni possibile tipo di linea curva, soffermandosi a definirne ogni possibile proporzione, combinazione, attributo, ivi compresa la 'retta minima', ovvero il segmento più corto che collega un qualsìasi punto ad una curva, senza peraltro definìre il concetto di perpendicolarità ad una curva.

Dobbiamo ora compiere un 'salto' di cinquecento anni per trovare un nuovo passo in avanti nello studio delle curve, o, meglio, delle *còniche*.

Pappo di Alessandria, vissuto nel IV sécolo dopo Cristo, deve la propria fama all'òpera '*Collezione*', nella quale ci tramanda molte parti degli studi di matemàtici antichi (Archiméde, Euclìde, Apollonio, Toloméo), aggiungendo suoi originali contributi.

Nel libro VII della '*Collezione*', viene posto il cosiddetto '*Problema di Pappo*', la cui più generale soluzione doveva giungere, millequattrocento anni dopo, ad òpera di René Descartes.

Pappo introduce un nuovo *luogo geométrico*, insieme di punti nel piano o nello spazio che hanno una medésima caratteristica, generàto da punti che possono essere individuati da prefissate condizioni di distanza e di recìproche proporzioni rispetto ad un gruppo di rette, inizialmente in numero di quattro. Pappo, oltre ad affermare che questo nuovo luogo geométrico si può concepìre anche con più di sei rette, senza però riuscire a dimostrarlo, si rende conto che esso è in realtà una curva, una nuova curva in tutto diversa da quelle conosciute prima nel mondo greco, sempre concepìte secondo concetti geométrici (intersezioni di figure e di sòlidi), o cinemàtiche (raffigurazioni dei tracciati di punti o figure in movimento).

Il '*Luogo di Pappo*' è un nuovo tipo di curva, direttamente definìta da soli rapporti matemàtici e che, come questi ultimi, può concepirsi in numero infinìto.

Con Pappo di Alessandria, la 'famiglia delle còniche' si espande così senza lìmiti nella sterminàta 'famiglia delle curve', della quale la prima si dimostra essere soltanto una piccola particolarità.

Conosciute matematicamente, nell'antica Grecia, le curve che, per molti motivi, possiamo chiamare 'classiche', Pappo di Alessandria apre così un nuovo assai più vasto panorama di 'curve possibili', la cui compléta risoluzione, come già detto, attenderà più di un millennio.

Lo studio delle curve subisce una nuova interruzione, per riprendere di fatto nell'undicesimo sécolo, grazie ai matemàtici àrabi.

Abbiamo già visto come gli studiosi dell'Islam tradussero molte òpere greche e, tra queste, *Elementi* di Euclìde e *Còniche* di Apollonio. Dei lavori di Archiméde gli àrabi conobbero soltanto *La misura del cerchio* e *Della sfera e del cilindro*. I trattati che approfondivano il metodo di esaustione, sino a particolarità vicine alla geometrìa infinitesimàle, non furono tradotti in àrabo, probabilmente perché non giunsero nelle terre dell'Islam.

I matemàtici àrabi, quindi, svilupparono in modo indipendente ed originale teorìe di geometrìa infinitesimale, in questo aiutàti dal potente linguaggio dell' Álgebra di al-Hwārizmi, che permetteva un'astrazione ben superiore alla Aritmética ed alla Geometrìa greche.

La prima òpera àraba di sviluppo della geometrìa di Archiméde la dobbiamo ai fratelli Banū Mūsā: Muhammad, Ahmad e al-Hasan, che scrissero il libro "*Kitāb Ma'rifat misāhat al-aškāl al-basīta wa-'l-kuriyya*" ('*Libro per conoscere l'area delle figure piane e sferiche*'). In esso troviamo trattazioni complete dei seguenti argomenti: la misura del cerchio, della superficie e del volume della sfera, la dimostrazione delle formula di Eròne per il triangolo rettangolo, la trisezione dell'angolo e la definizione del medio proporzionale.

Diventa sostanziale leggere l'ultimo periodo del trattato: "*Tutto ciò che abbiamo descritto nel nostro libro è òpera nostra, eccetto la conoscenza della circonferenza a partire dal diametro, che è dovuta ad Archiméde, e la conoscenza della posizione di due grandezze tra altre due grandezze affinchè* [tutte e quattro] *si susseguano secondo lo stesso rapporto, che si deve a Menelao . . .* ".

Disponendo delle sole due òpere archimedee, *La misura del cerchio* e *Della sfera e del cilindro*, i fratelli Banū Mūsā ripercorsero quindi autonomamente la via del grande scienziato siracusano, giungendo ai medèsimi risultati secondo métodi perfezionàti.

Archiméde non era giunto sulla più alta 'vetta' dell'antìca *Geometrìa*!

Il trattato *Libro per conoscere l'area delle figure piane e sferiche*, dei Banū Mūsā, tradotto da Gerardo da Cremona, e la *Misura del Cerchio*, di Archiméde, saranno i testi di riferimento nella ricerca geometrico/matemàtica europea del Rinascimento.

Un collaboratore dei Banū Mūsā, Tābit ibn-Qurra (826 – 901), raggiunse un livello che poi, per altri sécoli, non fu più raggiunto da altri. Utilizzando le proprietà delle proporzioni dei segmenti e le successioni di rapporti, riuscì a dimostrare il teorema che pone l'area del segmento di parabola pari a due terzi del rettangolo ad esso circoscritto.

Procedendo nell'analisi della parabole, Tābit ibn-Qurra introdusse la suddivisione della curva in parti sempre più piccole, dimostrando che l'area poteva essere espressa come la somma delle aree di tutte le parti, piccole a piacere cioè infinitesime, nelle quali la curva era divisa.

L'anticipazione del càlcolo infinitesimale è ormai evidente.

Seguirono altri matemàtici eccelsi, sino alla metà dell'undicesimo sécolo, poi la Matemàtica àraba si arrestò e soltanto parte di essa venne tramandata alla nascente Europa. Gli sviluppi più 'ardìti' restarono relegàti nelle traduzioni latine, senza che da essi alcuno continuasse la strada interrotta; probabilmente era la sòlita 'fuga in avanti', arrestatasi per la scarsa adeguatezza degli strumenti del linguaggio matemàtico.

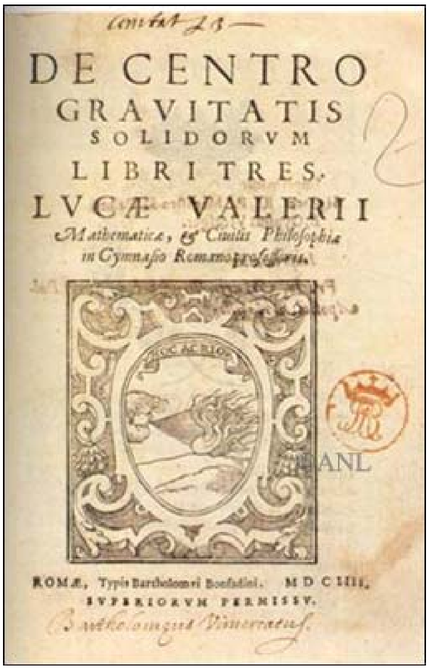
Ecco un altro salto temporale, nel quale si consuma l'ultimo e decisivo periodo di 'attesa' nel percorso verso il *Càlcolo Sublìme*.

Dobbiamo infatti giungere sino al XVI sècolo, periodo di numerose 'rivoluzioni' culturali, per incontrare i matemàtici che, attraverso contributi diversi ed a volte contrastanti, imposteranno, in forma definitiva, il càlcolo infinitesimale.

Il primo di questi, che 'riavvia', in modo significativo, la ricerca in questo campo, fu Luca Valerio (Corfù 1553 – Roma 1618). Entrato, a diciassette anni, nella Compagnìa di Gesù, nel 1601 ottenne – dopo aver frequentato potenti famiglie romane – la cattedra di Matemàtica alla Sapienza. Ammesso, nel 1612, all'Accadémia dei Lincei, fu amìco e discepolo di Galileo ma di questa vicinanza fece motivo, durante lo stato d'accusa subìto dal toscano, per allontanarsi anche dall'Accadémia nel 1616.

Possiamo dire che Valerio riprese il lavoro dove Pappo di Alessandria lo aveva lasciato mille anni prima: la curva non è solo una figura geométrica, come la intende la geometrìa archimedea della Grecia antìca; la curva è un 'luogo di punti' che hanno proprietà comuni, che appartengono ad una stessa legge matemàtica.

La dizione è, ora, assolutamente più generale, ancor più del 'Luogo di Pappo'.



DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM LIBRI TRES.
LVCÆ VALERII
Mathematicæ, & Ciuilis Philosophiæ in Gymnasio Romano professoris.
ROMÆ, Typis Bartholomæi Bonfadini. M D CIIII.
SVPERIORVM PERMISSV.

Le infinìte curve che Luca Valerio definisce posseggono una proprietà assolutamente generale: " . . . *circa diametrum et circa axim in alteram partem deficientes* . . ."; sono cioè figure, piane o sòlide, nelle quali si può individuare un diametro, o un asse, lungo il quale riducono la propria dimensione ad esso perpendicolare.

Tali sono le figure geométriche della tradizione Greca, di Euclìde e di Archimède, ma tali sono anche infinìte altre curve, che potremmo dire 'nuove'.

Luca Valerio sfrutta questa definizione per risolvere, con uno stesso métodо, qualunque tipo di curva, allo scopo di determinarne il centro di gravità, aspetto che aveva suscitato grande interesse a partire dalla seconda metà del Cinquecento. Nell'òpera '*De centro gravitatis solidorum*' (1604) sono individuati, con sorprendente unicità di metodologìa, i centri di gravità di tutte le còniche 'classiche' ma anche di tutte le figure, definìte da linee curve, purchè digradanti '*circa diametrum et circa axim*'.

Galileo Galilei fu profondamente impressionàto dalla lettura del '*De centro gravitatis solidorum*' ritenendolo un lavoro che ormai aveva esaurito, con soluzioni generali, il problema della definizione dei centri di gravità delle figure, sòlide e piane; questa convizione spinse lo scienziato toscano ad abbandonare questo tipo di studî, ritenendolo infatti ormai esaurìto, giungendo ad affermare che Luca Valerio meritasse d'essere indicato quale ' . . . *nuovo Archiméde dell'età nostra*'.

Ecco la strabiliante novità, che può far parlare di una svolta epocale nella Geometrìa: si possono individuare métodi ùnici per risolvere tutte le figure curve, purchè di esse sìa individuata una comune proprietà. La scoperta fu tanto 'rivoluzionaria' che lo stesso suo scopritore, al tèrmine del '*De centro gravitatis solidorum*', cerca di 'salvare' la geometrìa euclidéa dimostrando che si potevano raggiungere gli stessi risultati seguendo anche una '*via magis naturalis*', assai sìmile alla tradizione di Archiméde; ma ormai . . . il dado è tratto!

I frutti del grande lavoro di Luca Valerio e di studi ed osservazioni di Galilei e di Keplero, furono colti dal maggior matemàtico dell'era che con lui stesso si concluse: Bonaventura Cavalieri (Milano 1598 – Bologna 1647). Religioso, dal 1615 frate nell'ordine monàstico dei Gesuàti (fondato da S. Girolamo nel 1360 e soppresso nel 1668 da papa Clemente IX – quindi da non confondere con l'òrdine dei Gesuìti, ancòr oggi attivo), venne trasferìto a Pisa, nel 1616, dove studiò con Benedetto Castelli, alla scuola di Galileo ed allo stesso segnalàto per le sue eccezionali doti di matemàtico. Richiamàto a Milano, nel 1620, intrattenne una corrispondenza con la scuola pisana, dalla quale si può seguìre l'evoluzione del suo pensiero che lo portò, nel 1627, a completare la prima versione dell'òpera sua più importante: "*Geometrìa indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*", pubblicata soltanto nel 1635 a Bologna dove, dal 1629, riuscì ad ottenere una cattedra di 'lettura di Matemàtica', còmplice l'appoggio dello stesso Galileo.

Bonaventura Cavalieri non poteva immaginare che l'ìdea che sta alla base della sua scoperta era . . . vecchia di circa 1850 anni!; questa notizia, infatti, giunse soltanto nel 1906. In quell'anno, uno studioso tedesco, J. L. Heiberg, scoprì, nella bibliotéca Gerosolimitana di Istambul (un tempo Costantinòpoli e poi Bisanzio) una trascrizione di alcune parti delle òpere di Archiméde, tra le quali una lettera che lo scienziato siracusano aveva inviàto a Eratòstene, direttore del Museo di Alessandria, dove aveva sede la famosa Bibliotéca. In questo documento, Archiméde sostiene che le figure piane, per quanto complesse, si possono dividere in fili 'pesanti', e le figure sòlide in piani, che si possono poi ricomporre a formare altre figure più sémplici, facilmente risolvibili. L'indicazione è, in Archiméde, restata un'intuizione senza séguito, ma fa di lui certo la più grande mente matemàtica di tutti i tempi.

Ecco cosa codìfica Bonaventura Cavalieri: un método che consente di scomporre qualsìasi figura, piana o sòlida, in linee o piani paralleli, con i quali condurre analisi di proporzionalità e di similitudine, al fine di poter assimilare l'oggetto esaminàto ad altri dei quali è già nota la soluzione (cioè se ne conoscono gli attributi: superficie, baricentro, simmetrìe, centri, volumi, . . .).

Questi elementi, nei quali ogni oggetto geométrico può essere scomposto, sono, per Cavalieri, le sue parti elementari, perciò indivisibili, che chiama '*Tutte le linee*' e '*Tutti i piani*', a seconda che formino una figura piana o un sòlido.

Mentre Luca Valerio individua classi di curve con una comune caratteristica, " . . . *circa diametrum et circa axim in alteram partem deficientes* . . .", per risalire alla definizione del loro centro di gravità, il frate gesuàto milanese definisce un método generale per risolvere, in ogni aspetto, qualsìasi forma o figura.

Siamo all'épilogo della 'conquista' di 'tutte le curve'?

No, siamo 'semplicemente' all'épilogo del modo antìco di affrontare questo problema ed alla conseguente apertura della nuova prospettiva.

Ora è dimostrato che esistono classi generàli ed infinìte di figure geométriche, piane o sòlide, e quindi si possono trovare i mètodi, altrettanto generàli e generalizzabili, per la loro risoluzione.

Dopo Cavalieri, la ricerca non partirà più dall'origine geométrica del problema, cioè non sarà più la figura geométrica il punto di partenza; si sta ormai avvicinando il momento nel quale anche la Geometrìa sarà risolta con un linguaggio puramente matemàtico.

Una prospettiva in tutto nuova e certo 'rivoluzionaria'.

Protagonisti di questo cambiamento epocàle sono i matemàtici francesi, quasi che la scuola italiana di Galileo si fosse spenta prematuramente con la morte di Cavalieri e di Torricelli; quest'ultimo, che mostrava capacità tali da far presagire che stesse avvicinandosi alla scoperta conclusiva del Càlcolo Sublìme, che poi fù d'altri, aveva soltanto trentanove anni.

François Viète (Fontenay-le-Comte 1540 – Parigi 1603), René Descartes (La Haye 1596 – Stoccolma 1650) e Pierre de-Fermat (Beaumont de-Lomagne 1601 – Castres 1665), furono senz'altro i principàli, ma non gli ùnici, artèfici di questo nuovo mondo matemàtico, che preparò il 'terreno' per l'ultimo atto di questo capitolo.

Tra la morente scuola galileiana e la vivacissima comunità matemàtica francese, teneva i collegamenti e suscitava gli interessi e le collaborazioni un personaggio che abbiamo già incontrato, la cui importanza non sarà mai sufficientemente celebrata: Marin Mersénne. Spesso, nei libri che parlano di quest'época, risuona l'eco della sua voce e soprattutto l'azione infaticàbile della sua corrispondenza.

Viéte riordinò la notazione algébrica, utilizzando, nelle equazioni, le lettere dell'alfabéto con una règola costante: le vocali per indicare le incognite e le consonanti per le grandezze note o per i paràmetri costanti. Con tale mètodo Viéte fu in grado di definìre una serie di régole algébriche, sino ad allora già applicàte ma mai enunciate nella loro generalità, come ad esempio: la proprietà distributiva del prodotto o l'elevamento a potenza di un binomio, . . .

Viéte iniziò a cercare le soluzioni (*radici*) delle equazioni attraverso costruzioni geométriche, precedendo, su questa strada, Descartes (in Italia, italianizzato in Cartesio, in modo certo poco appropriato, giacchè il suo cognome originale era Des Cartes), frate gesuìta, filosofo e scienziato, uomo di spicco del XVII sécolo.

La sua òpera filosofica più grande, '*Discours de la méthode*', pubblicata a Leida nel 1637, contiene tre appèndici: '*La dioptrique*', '*Les metéores*' e '*La Géométrie*', tutte impostate sulla prima régola del método cartesiano:

"*Non ammettere come vero nulla che non si sia riconosciuto con evidenza per tale . . .* ".

Complétano il método di Descartes altre tre régole, che devono essere seguìte in ogni processo della mente:

- *anàlisi*: dividere ogni problema nel maggior numero possibile di parti minori e più semplici;
- *sìntesi*: ricomporre gli elementi sémplici servendosi di connessioni di per sé evidenti;
- *enumeràzione*: rivedere ogni passaggio fino a giungere alla certezza dell'esattezza di ciascuno, senza l'òmbra del dubbio.

L'applicazione del método alla scienza matemàtica è evidente!

'*La Géométrie*', sebbene pensata quale appendìce ad un'òpera filosofica, diverrà ben presto il riferimento per la nuova Geométrìa, ormai affrancata dalle residue rigidità dei cànoni della tradizione risalente all'antìca Grecia.

In quest'òpera, Descartes àpplica il proprio métodо per ridurre i problemi geométrici in espressioni algèbriche, le equazioni, le cui soluzioni (radici) si trovano attraverso l'uso di figure geométriche di complessità crescente, in proporzione alla complessità del problema posto.

Per esemplificare non c'è di meglio che sottolineare che nelle prime pagine de '*La Géométrie*' è spiegàto che le operazioni, che stanno alla base della Matemàtica, l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e l'estrazione di radice, possono essere risolte attraverso costruzioni geométriche di segmenti e circonferenze, che sono le figure geométriche più semplici.

La Geometrìa, quindi, è lo strumento che fornisce i mezzi, le figure geométriche, necessarî per individuare le radici delle equazioni algébriche e Descartes si impegna nel classificarle secondo la loro crescente complessità, dando òrigine alla Geometrìa Analìtica.

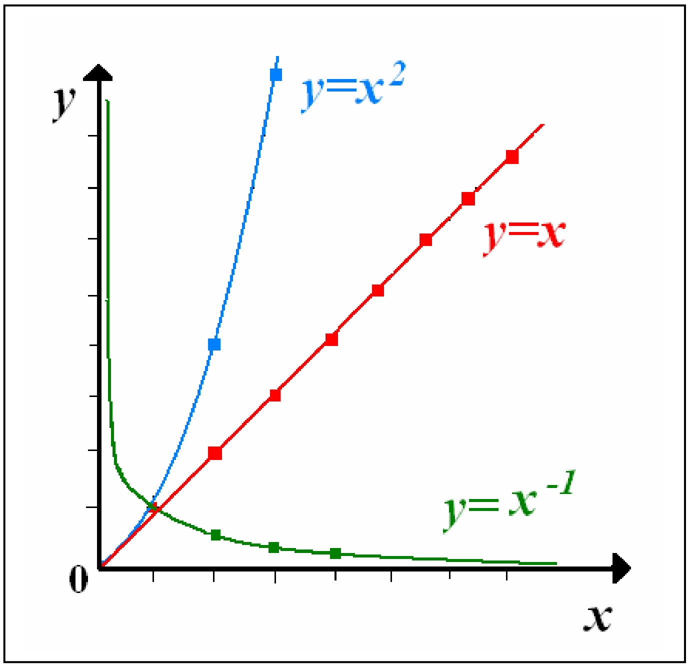
Ecco, per la prima volta, il processo risolutivo che nasce dall'associazione geométria-equazione-curve-soluzione. È un passo importante, anche se l'espressione matemàtica è ancòra associata ad una curva non come sua espressione ma in modo subordinato, quale mezzo 'di passaggio' tra il problema e la sua soluzione.

Di Descartes è doveroso citare l'uso di assi di riferimento, sui quali individuava le grandezze e la direzione del loro sviluppo. Anche se il sistema di coordinate oggi universale è detto appunto '*Cartesiano*', quello elaborato da Descartes ne è una versione assai grossolana: gli assi, infatti, non erano assunti tra loro perpendicolari né si protraevano verso i valori negativi; con notazione moderna diremmo che era limitato al primo quadrante.

Fù Pierre de-Fermat a 'raddrizzare' gli assi cartesiani, imponendo che fossero sempre tra loro perpendicolari, e li utilizzò, per primo, anche secondo le tre dimensioni spaziali, ma non solo: lavorando nello stesso periodo di Descartes, ma in modo indipendente, iniziò ad associare alle figure geométriche le espressioni matemàtiche, non in modo cartesiano, ma dimostrando che le seconde erano, in realtà, la traduzione matematica delle prime.

Le curve, tutte le curve, potevano quindi essere classificate secondo forma e grado delle espressioni matemàtiche ad esse associate o delle quali esse erano lo sviluppo nel piano o nello spazio '*cartesiani*', che altro non sono se non il piano e lo spazio nei quali sono disegnate, rispettivamente, due o tre rette (chiamàte, nel piano, *asse delle x o delle ascisse* ed asse *delle y* o *delle ordinate*), tra loro perpendicolari ed intersecantisi in un punto, detto *orìgine*. Ogni punto di ciascuna retta rappresenta la *coordinata cartesiana*, secondo x o y o z, di qualsìasi punto nel piano o nello spazio.

De-Fermat dimostra, così, che un'equazione nella quale le coordinate variabili x ed y compaiono al primo grado di potenza(es.: $y = x$), rappresenta sempre una linea retta; se il grado è inferiore (es.: $y = x^{-1}$) o superiore ad uno (es.: $y = x^2$), allora l'espressione matemàtica è sempre associata ad una curva.



La conseguenza di queste conclusioni è straordinaria: la corrispondenza *equazione*⇔*curva* rende il problema delle curve come risolvibile attraverso un método semplicemente matemàtico. Di questo lo stesso de-Fermat è il pioniere, definendo il métodο per individuare i punti di massimo e di minimo di una curva.

È l'ultima porta che si apre per consentìre l'ingresso nella 'stanza' del Càlcolo Sublìme.

Presa un'espressione matemàtica associata ad una curva, de-Fermat dimostra il métodο per individuare i punti che rappresentano un massimo o un minimo rispetto ai valori assunti nel riferimento cartesiano.

Il problema è concettualmente sémplice: un'equazione, almeno di secondo grado in x o in y (nella quale, cioè, x o y, o entrambi, compàiono con esponente almeno pari a 2), rappresenta una curva, che chiamiamo f(x) o f(y) (in linguaggio matemàtico si legge '*funzione di x*' oppure '*funzione di y*', o semplicemente: '*f di x*'). Questa curva disegna, sul piano cartesiano, un tracciato nel quale possiamo distinguere punti di massimo o di minimo, rispetto all'asse della variabile x o y.

Per individuare, dall'espressione matemàtica, questi particolari punti, Pierre de-Fermat dimostra che è necessario procedere all'esame del valore della funzione che essa assume, in corrispondenza di un valore x, della variàbile, e di un successivo valore ottenuto aggiungendo ad x una quantità piccola a piacere (infinitesimale?), che chiameremo ε.

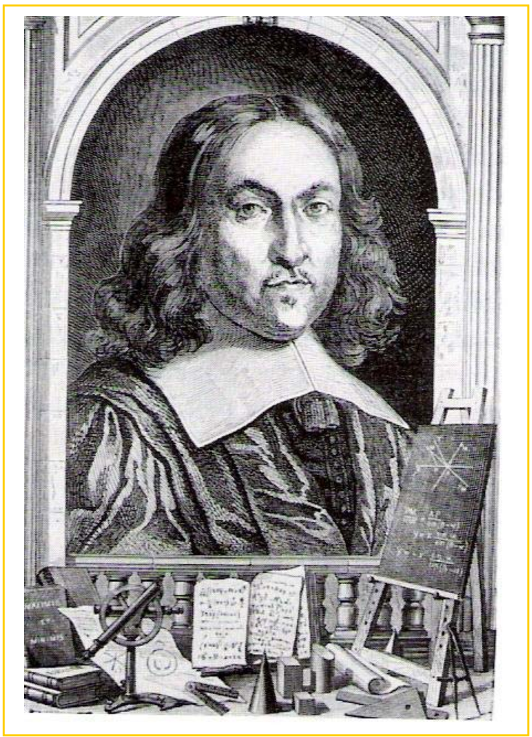
È evidente che sino a quando la funzione cresce o decresce la differenza tra i corrispondenti due suoi valori, $[f(x) - f(x+\varepsilon)]$, per quanto essi sìano vicini, vicinissimi, non è mai nulla. Diventa nulla soltanto nel caso in cui la loro estrema vicinanza coincìde con il punto in cui la curva ha un massimo o un minimo, perché, in quel particolare punto, essa 'cambia verso': nel caso del massimo, da ascendente diventa discendente, viceversa nel caso del minimo.

Per ogni valore di x per il quale si giunge ad annullare la differenza [f(x) - f($x + \varepsilon$)], possiamo concludere che in quel punto x ci troviamo di fronte ad un massimo oppure ad un minimo.

Ecco l'originalità dell'ìdea di Pierre de-Fermat: se la funzione è continua, cerchiàmone i punti caratteristici, procedendo per differenze le più piccole possibili, infinitesime.

Nella stanza del càlcolo infinitesimale ora si è anche accesa la prima luce!

Sulla strada aperta da Pierre de-Fermat seguirono altri suoi contemporànei, nel percorso che trovò, alla méta, i due 'campioni': Leibniz e Newton.



Di Pierre de-Fermat vogliamo ancòra ricordare un particolare della sua straordinaria ed originale personalità. Fu sempre assai ritroso nel pubblicare i suoi lavori; quando, nel 1637, fu pubblicata la *Géométrie* di Descartes, de-Fermat aveva già da tempo elaboràto il suo métodо dei massimi e dei minimi, dimostrandone l'ùtilità anche nel determinare le tangenti ad una curva, ma limitandosi a comunicare l'ésito dei suoi risultati ad una ristretta cerchia di amici e colleghi.

Rendendosi conto che il lavoro di Descartes si dimostrava 'in competizione' con il proprio e che proponeva un métodо per la determinazione delle tangenti meno efficace, de-Fermat decise, nello stesso 1637, di pubblicare l'òpera '*Ad locos planos et solidos isagoge*', ma non in una edizione stampata, bensì attaverso la produzione di un limitàto numero di opuscoli manoscritti.

La riservatezza della sua genialità ne fa un personaggio 'all'antìca', non coinvolto nella modernità del suo tempo, fatta sì di ricerca ma strettamente projettata verso la condivisione e la comunicazione.

Bisogna attendere ben quattordici anni dopo la sua morte per veder data alle stampe, a Tolosa nel 1679, una prima raccolta dei suoi lavori, rendendo al mondo la sua grandezza, fatta anche di teorémi, spesso senza dimostrazioni compléte, che si riveleranno esatti anche a distanza di sécoli, come, ad esempio, il problema detto '*Equazione di Fermat*':

"L'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ha soluzioni intere per n maggiore di due", la cui dimostrazione giunse, dal matemàtico inglese Andrew Wiles, soltanto nel 1993.

Siamo giunti ora al punto di introdurre ciò che è nel titolo di questo Capitolo: "*Il Càlcolo Sublìme*".

Quanto sinora scritto è, sebbene non sembri!, l'estrema sìntesi dell'evoluzione di quella parte della 'Scienza dei numeri' che, da questo momento, vivrà una vita in tutto nuova, dalle potenzialità e prospettive inaspettate ed inaspettabili, diremmo: infinìte. È curioso sottolineare che, di fatto, il Càlcolo Sublìme o, come oggi diciamo, Càlcolo Infinitesimàle, ponendo l'attenzione su oggetti infinitamente piccoli (infinitésimi, appunto) abbia creàto lo strumento per tradurre l'intero universo in linguaggio matemàtico.

Per coerenza con il titolo, e devozione verso i suoi scopritori, continueremo ad utilizzare il nome 'Càlcolo Sublìme'. Siamo in questo anche spinti dal considerare che ancòr oggi non sembra esservi una terminologìa unìvoca. L'interpretazione che ci appare la più diffusa identìfica il Càlcolo Infinitesimale come formàto dal Càlcolo Differenziale e dal Càlcolo Integrale, che sono, in buona sostanza, processi matemàtici l'uno inverso dell'altro (per nostra fortuna, non siamo chiamàti, né qui né altrove, a dare una definitiva régola!, né saremmo in grado di assolvere un così àrduo còmpito).

Il primàto di una scoperta, lo abbiamo visto alcune volte anche in questa Storia dell'Idraulica, dovrebbe essere sempre riconosciuto a colui che, per primo, raggiunge la méta; coloro che, come noi, séguono il fluìre del progresso del sapere umano, dovrebbero sempre rispettare questa régola.

Per la storia del Càlcolo Sublìme la questione non è di poco conto; il primàto, infatti, è stato oggetto di asperrime contese già tra i due protagonisti, i loro rispettivi sostenitori, le Accadémie, le Riviste Scientifiche, sino a raggiungere una dimensione quasi transnazionale, con un confronto durato decenni, se non addirittura sécoli, e che crediamo mai completamente sopìto. Parlarne, ogni volta, è cosa, quantomeno, delicatissima.

Il Càlcolo Sublìme nasce, ufficialmente, nel 1684, quando Gottfried Wilhelm Leibniz (Lipsia 1646 – Hannover 1716) pubblicò, sulla rivista '*Acta Eruditorum*' (che abbiamo già incontrato nel Capitolo 8), l'òpera:

"*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*."

L'inglese Isaac Newton (Woolsthorpe 1642 – Kensigton Londra 1728) pubblicò il suo trattato di Càlcolo Sublìme, nel 1686:

"*Philosophiae naturalis principia mathematica*."

Questi sono i riferimenti che scandiscono i tempi della pubblicazione dei trattati che, in entrambe i casi, erano maturati già da anni nella eccezionale mente dei due scienziati/filosofi.

E' certo che ambedue mantennero una fitta corrispondenza, diretta o attraverso la circolazione della Comunità Scientifica (la cui nàscita è ricordata nel Capitolo 8), e che pertanto entrambi ebbero modo di cogliere, dall'altro, idee, ispirazioni, spunti, opportunità.

Non sìa mai che noi ci si esprima sulla questione, ma, assai più modestamente, ci limitiamo ad osservare che forse non è neppure una questione.

Sia Leibniz che Newton, infatti, elaboràrono un método, su base infinitesimale (cioè considerando variazioni infinitesime di quantità geometrico/matemàtiche/temporali), giungendo, per vie differenti, alla stessa méta: 'per vie differenti', perché, Leibniz e Newton elaboràrono métodi diversi, anche se in alcuni passaggi sìmili, come del resto fecero alcuni altri loro predecessori, che alla stessa méta non giunsero, ma che senz'altro hanno concorso alla nàscita dell'idea vincente.

Da quando il riferimento della Scienza divenne la plateà della Comunità Scientifica, il 'Primàto assoluto', inteso come 'primo originàle istante di tempo matemàtico', assunse contorni sempre più incerti!

Non possiamo però esimerci dal 'scoprire le nostre carte e prendere una posizione', non foss'altro perché costretti a dover procedere con l'òrdine che vedrà, per secondo, colui che ha poi ottenuto il maggior séguito, che diventa così, in questo caso, maggior riconoscimento.

Isaac Newton imposta il proprio ragionamento considerando le equazioni, con le incognite x ed y, come una relazione che decrive una realtà in movimento, essendo x ed y le coordinàte di un punto che, per ogni valore delle stesse, si sposta nel piano disegnando, così, una trajettoria; ecco perché egli chiama x ed y con il términe '*Fluenti*'.

La trajettoria, disegnata dal punto mentre le sue coordinate x ed y 'fluìscono', nel tempo, secondo l'equazione data, può essere un qualsìasi 'oggetto geométrico': una retta, una curva o un altro disegno, anche di natura non ancòra conosciuta, ma sempre caratterizzato dal 'movimento' del punto, secondo la legge espressa dall'equazione.

Ecco che ora Newton introduce due nuove grandezze: *xpunto* ed *ypunto*, che rappresentano le variazioni, in un intervallo di tempo infinitesimale, della trajettoria in quel punto, cioè la velocità con la quale le *Fluenti*, x ed y, mùtano valore; per questo Newton le chiamerà '*Flussioni*'.

Il rapporto *xpunto*/*ypunto* diventa così espressione della 'velocità' con la quale il punto 'disegna' la curva, velocità che, in quanto tale, rappresenta anche l'inclinazione della retta tangente alla trajettoria in quel punto, detta *coefficiente angolare*. In ogni punto della curva, corrispondente ai valori assunti di x ed y lungo gli assi cartesiani, si possono quindi calcolare le *Flussioni* ed il loro recìproco rapporto che rappresenta il *coefficiente angolare* della retta tangente, così individuata nella relativa espressione matemàtica.

Al contrario, una qualsìasi equazione può essere considerata una *Flussione* di una *Fluente* incògnita. La soluzione della *Flussione*, come Newton dimostra, consente di individuare l'equazione delle relative *Fluenti*, calcolandone la quadratura, cioè l'àrea che essa definisce nel piano, e tutti gli altri attributi matemàtici e geométrici.

Per determinare, data un'equazione in x ed in y, le rispettive *xpunto* ed *ypunto*, cioè per definìre le *Flussioni* di un'equazione, Newton procede secondo un'analisi infinitesimale, considerando l'intervallo compreso, per la Flussione *xpunto*, tra una x data ed il valore che la stessa assume dopo un tempo infinitesimo o (si legge: ' o piccolo'), quindi quando il punto della curva ha assunto una coordinata, sull'asse delle x, pari a ($x + o \cdot$ *xpunto*).

Lo scienziato inglese formulerà le espressioni matemàtiche per le Flussioni di ogni possibile operazione (somma, differenza, moltiplicazione, potenza, radice . . .) eliminando i fattori infinitesimi di esponente (grado) superiore ad uno (cioè, per intenderci meglio dove figuri o elevato a potenze superiori ad uno). I risultati che otterrà saranno identici alle derivate calcolate da Leibniz, per altra via.

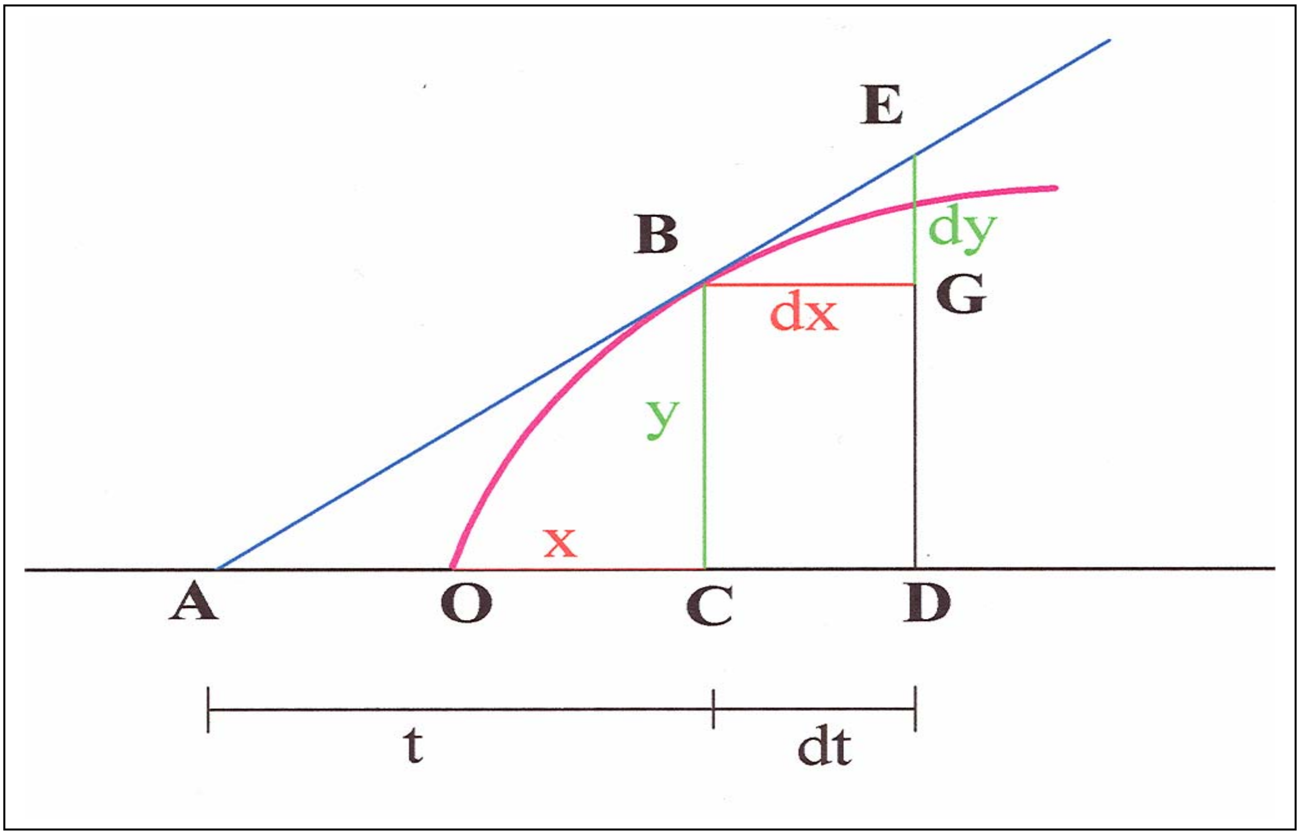
Una volta scritta la *Flussione* di un'equazione di qualsìasi forma essa sìa, quindi corrispondente a qualsivoglia figura geométrica, Newton dimostra che la risoluzione delle *Flussioni*, attraverso lo Sviluppo in serie, consente di giungere alla definizione delle caratteristiche della curva associata: area, baricentro tangenti . . .

Trasformare le espressioni algébriche, per quanto complesse, in sviluppi in serie consentiva infatti di ridurre qualsiasi livello di complessità in espressioni matemàtiche 'sémplici' costituìte da polinòmi.

La semplicità giocò, in un primo periodo, a favore di Newton, anche perché la prospettiva del collega tedesco era ben più rivoluzionaria, quindi difficile da comprendersi anche dal punto di vista 'psicologico/filosofico'.

Gottfried Wilhelm Leibniz si muoverà, infatti, secondo un approccio in tutto nuovo.

Esaminando un'equazione in *x* ed in *y* che, al variare delle coordinate *x* ed *y*, disegna una **curva** nel piano, il tedesco prende in considerazione i valori dell'equazione assunti per le differenze di due valori di ***x***, e corrispondentemente di ***y***, che differiscono tra loro per quantità infinitesime, quindi valori tra loro assai vicini, quasi coincidenti; chiamerà questi valori ***dx*** e ***dy***.



Questo passaggio fu il più difficile, dal punto di vista concettuale, quindi il più geniàle ma anche soggetto alle maggiori critiche. Leibniz, cioè, esàmina l'aumento delle grandezze per quantità tanto infinitésime da non potersi comprendere con concetti descrivibili ma, nello stesso tempo, tratta la curva continua come fosse in realtà composta da una successione di scalini, per quanto infinitesimi.

Mentre Newton si basa sul tempo infinitésimo, Leibniz riduce, diremmo per esaustione, lo spazio.

Il rapporto $\frac{dx}{dy}$ è calcolato attraverso le formule di differenziazione dell'equazione, dallo stesso Leibniz elaboràte per tutte le possibili operazioni: moltiplicazione, divisione, somma, potenza, estrazione di radice, . . .

Qualunque espressione matemàtica, di qualsivoglia complessità, poteva così essere 'differenziata', cioè di essa si poteva calcolare, usando una terminologìa moderna, la '*Derivata prima*' che corrispondeva, in ogni punto della curva, al calcolare il valore del *coefficiente angolare*, cioè dell'inclinazione, della **retta tangente** in quel punto.

Il processo può anche non fermarsi qui, ma procedere per successive 'differenziazioni': la Derivata seconda, terza . . . sino alla derivata n-esima, tutte in grado di dare nuove informazioni sull'indagata espressione di partenza.

Ma la differenziazione di un'equazione algébrica porta ad una conseguenza ancòr più 'dirompente': man mano che lo sviluppo del método di Leibniz schiudeva un universo sempre più vasto, senza lìmiti matemàtici, divenne evidente che l'operazione inversa della differenziazione consentiva di calcolare l'area della curva, in un intervallo dato, risolvendo, contemporaneamente, l'equazione di partenza, che è un'equazione differenziale.

Avviene che gran parte dei problemi di Meccanica, di Fisica, di Idraulica, di ogni scienza che tratta 'cose che si muovono nel tempo', sono matematicamente descrivibili attraverso equazioni differenziali, che 'ossérvano' lo stato del fenòmeno in intervalli infinitesimi di tempo *dt*. La risoluzione di tali equazioni differenziali costituisce la soluzione dell'interpretazione matemàtica del fenòmeno osservato. E' questo lo sviluppo certo più rilevante della scoperta di Leibniz.

Newton e Leibniz, in altre e speriamo più esemplificative parole, riuscirono finalmente a risolvere il problema che ha aperto questo Capitolo: descrivere, con i numeri, *il continuo* e la sua più intuitiva manifestazione, il *movimento*.

Chi di loro fu il più grande?

È importante stabilìre se una 'gigante' è più grande di un altro 'gigante'?

Newton, certamente, ha il 'vantaggio' d'esser stato grande in molto altro, al punto che da molti non è neppure considerato un matematico puro, bensì un fisico con attitudine alla Matemàtica. Come non ricordare, tra le sue conquiste: la Legge della gravitazione universale, le tre leggi fondamentali della dinàmica, la composizione cromàtica della luce della quale enuncia la natura corpuscolare, il telescopio a riflessione, ...

Anche di Leibniz possiamo dire qualcosa di 'curioso': fu prima filosofo (in senso moderno!) che matemàtico.

Entrambi rappresentano massime espressioni delle altezze alle quali può giungere la mente dell'uomo; persone eccezionali tra le eccezionali, la cui energìa intellettuale è tale da proiettare, in balzo prodigioso, l'intero mondo della conoscenza umana.

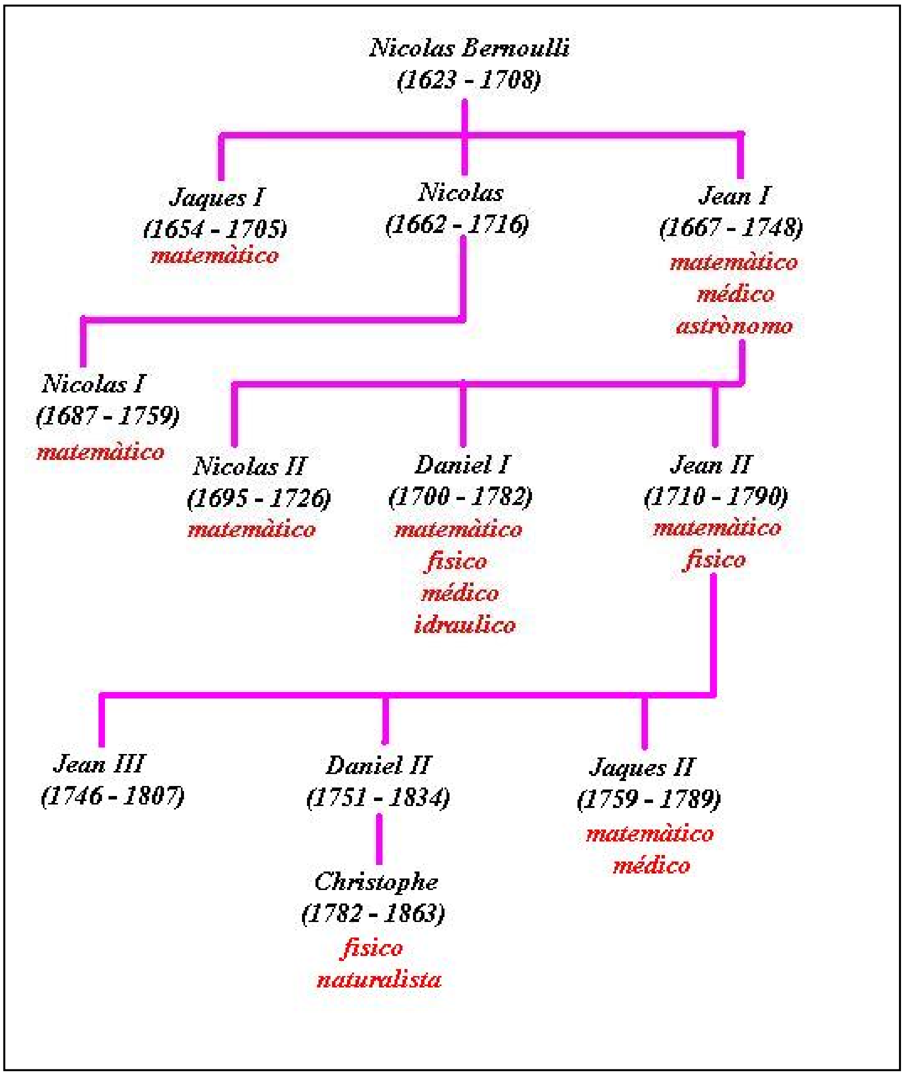
Persone eccezionali tra le eccezionali che la Scienza ha incontrato nel suo cammino, quasi sempre tra loro separate nello spazio e nel tempo: menti geniali a volte addirittura in grado di caratterizzare lo stesso periodo nel quale sono vissute.

Al términe di questo Capitolo, e sulla scìa del vincente mètodo leibniziano, incontriamo però una singolarissima eccezione, nella strabiliante concentrazione di genialità nell'àmbito di una stessa famiglia, una vera dinastìa che produsse menti eccelse 'di generazione in generazione' e che molti, erroneamente, ne riconoscono la grandezza per uno solo di loro (sìmbolo certo più noto di tutta l'Idraulica): la famiglia Bernoulli.

Nulla è più esemplificativo dell'immagine di questa genealogìa:

Come abbiamo visto nel Capitolo 10, Basiléa fu una delle città dove trovarono rifugio molti cristiani protestanti francesi ed olandesi, perséguitàti nella fase cruenta della reazione cattòlica: gli Ugonotti.

Uno di loro, originario di Anversa, si rifugiò nella grande città sulle rive del Reno nella prima metà del XVII sécolo; si chiamava Nicolas Bernoulli (Anversa 1623 – Basiléa 1708). Era mercante e si stabilì nella città svizzera, crescendo i suoi tre figli: Jacques I (1654 – 1705), Nicolas (1662 – 1716) e Jean I (1667 – 1748).



Jacques I, matemàtico e professore di Fisica all'università cittadina, ne divenne poi Rettore. Anche il fratello minore, Jean I, fu, al séguito del fratello primogénito, un àbile matemàtico ma si applicò anche nella professione médica e nell'astronomìa; lavorò con il matemàtico francese L'Hopital a Parigi; insegnò matematica per dieci anni a Groninger, in Olanda, e poi successe a suo fratello Jacques nella cattedra di Fisica a Basiléa.

Jean I ebbe tre figli: Nicolas II (1695 – 1726), matematico; Daniel I (1700 – 1782), matematico, fisico, médico e idràulico, del quale molto diremo nel prosieguo di questo racconto; Jean II (1710 – 1790), matemàtico e fisico.

Nicolas I (1687 – 1759) matemàtico, figlio di Nicolas, Jacques II (1759 – 1789) matemàtico e médico, figlio di Jean II, e Christophe (1782 – 1863), fisico e naturalista, figlio di Daniel II, fratello di Jaques II, complétano l'elenco di quella genìa, orignàtasi da Nicolas Bernoulli, i cui membri eccelsero in molte discipline scientifiche, evidentemente ispiràti a ben diverse inclinàzioni rispetto alla professione di mercante del capostìpite.

Abbiamo già ricordàto, all'inizio di questo Capitolo, una corrispondenza di Jaques I Bernoulli a Leibniz, del 1687, con la quale lo svizzero chiedeva lumi al matemàtico tedesco sulla sua " . . . *matemàtica più sublìme che finora non sono riuscito ancòra a penetrare* . . . ".

Sebbene questo aiuto non giunse, Leibniz era lontano da Hannover e vi tornerà soltanto nel 1690, Jaques I, con l'aiuto del fratello minore Jean I, riuscì a comprendere ed applicare il càlcolo leibniziano, pubblicando i risultati su '*Acta Eruditorum*'.

I due fratelli Bernoulli non solo dimostrarono la potenza del nuovo Càlcolo, risolvendo con sbalorditiva semplicità problemi assi complessi, ma perfezionarono il método, ampliandone le potenzialità. Lo stesso Leibniz riconobbe questo nuovo sviluppo, scrivendo a Jaques I, nel 1694: "*Vestra enim non minus haec methodus, quam mea est.*"

Quantunque la dìsputa sulla primazìa della scoperta del Càlcolo Sublìme durerà a lungo, saranno le differenze tra i due métodi il motivo della conferma, nei fatti, che il tedesco era sulla strada migliore. Del resto, di strada aperta su *un nuovo mondo* parla lo stesso Leibniz concludendo la prima pubblicazione del 1684:

"*Questi, invero, sono soltanto gli inìzi di una geometrìa molto più sublìme, che si estende a qualunque dei problemi più difficili e più belli anche della Matemàtica mista, che senza il nostro càlcolo differenziale o uno sìmile, nessuno tratterà con pari facilità*."

Risolvendo un problema posto da Leibniz, Jaques I Bernoulli utilizzò per primo il términe '*Integrale*' per indicare l'operazione inversa del càlcolo differenziale, così come, per primo nel 1694, trovò e risolse l'equazione della curva elastica, cioè della forma che assume una struttura lineare (per esempio, una trave) quando è caricata di un peso; il suo '*Curvatura laminae elasticae*' è la prima anàlisi teorico/matemàtica del fenòmeno dell'elasticità, princìpio base della 'Scienza delle costruzioni'.

Vinse, 'sul campo', il Càlcolo Sublìme di Leibniz; le parole di Jean I Bernoulli, che nel 1713 ancòra scrisse per sostenerne le superiori capacità, sono eloquenti: " . . . *le cose che abbiamo pubblicato*, ... *come le Catenarie, le Velarie, le Isòcrone Paracentriche, le Brachistocrone, le nuove proprietà della Ciclòide ed i suoi innumerevoli segmenti quadrabili, il Càlcolo degli Esponenziali ed il método di differenziarli, la misura delle Coevolute* . . . "; quanta strada compiùta dalle prime Lùnule di Ippòcrate di Chìo!

La diffusione del nuovo método di càlcolo iniziò ad òpera dei due fratelli Bernoulli, poiché Leibniz non realizzò mai il suo propòsito di pubblicare un trattato, orgànico e didattico, del quale concepì soltanto il tìtolo: '*Scientia infiniti*'.

Sotto la guida dei fratelli Jaques I e Jean I Bernoulli, troviamo il nipote Nicolas I, figlio del loro fratello 'di mezzo' Nicolas, Daniel I e Nicolas II, figli di Jean I, ma non possiamo tacere la presenza di altri eccelsi matemàtici, che incontreremo presto in questa Storia: Leonhard Euler, Alexis-Claude Clairaut, Pierre-Louis Moreau de Mapertuis e Guillaume-François de l'Hôpital marchese di Saint-Mesme e conte di Autremont (Parigi 1661 – 1704), ben più semplicemente noto come l'Hôpital.

Tutti costoro ebbero un comune centro di riferimento e confronto nell' '*Oratoire*', sòrta di cìrcolo scientifico voluto dal filosofo Nicolas Malebranche, membro – dal 1699 – dell' *Académie des Sciences*, che considerava di grande importanza diffondere il pensiero filosofico e matemàtico di Descartes.

Presso l'Oratoire, nel 1691, si incontrarono il giovane Jean I Bernoulli ed il marchese de l'Hôpital, già nòto per la sua attività di matemàtico, sebbene ancòra a digiuno di ogni nozione sul Càlcolo Sublìme.

Jean, riferendo dell'incontro, pose al marchese un problema relativo alla determinazione del raggio del cerchio osculatore di una particolare curva.

L'Hôpital giunse a soluzione in un'ora.

"*Gli assicurai* – scrive il Bernoulli – *che il problema di determinare il raggio dell'evoluta di ogni tipo di curva, sia algébrica sia trascendente, sia nei vertici, sia in altri punti, per noi* [leibniziani] *non era che un gioco da ragazzi e che potevamo dare una formula generale, con cui trovare questo raggio in un numero di minuti pari al numero di quarti d'ora da lui impiegati. Curioso di assistere a questa prova, a sua volta mi sottopose un esempio di curva più complicata di quella che gli avevo proposto. Immediatamente gli fornii il valore del raggio nel vértice e ciò lo stupì e sorprese a tal punto che da quell'istante si appassionò alla nuova analisi infinitesimale e nacque in lui un forte desiderio di impararla da me*. . . . ".

Il marchese de l'Hôpital chiese ed ottenne sistemàtiche lezioni dal matemàtico svizzero, acquisendo tale dimestichezza del nuovo método da giungere alla composizione, in collaborazione con lo stesso Jean I Bernoulli, del testo '*Analyse des infiniment petits*', del 1696, che fu la principale òpera di diffusione in Europa del càlcolo infinitesimàle.

La potenza del Càlcolo Sublìme ed il débito dovuto a Leibniz e soprattutto al proprio più giovane maestro, fu dichiarato dall'autore sin dalla premessa:

"*L'estensione di questo càlcolo è immensa: si adatta alle curve meccaniche ed a quelle geométriche . . . . di là nàsce un'infinità di scoperte sorprendenti nei confronti delle tangenti, . . . sui problemi dei massimi e dei minimi, sui punti di flesso e di regresso delle curve, sulle evolute, sulle càustiche per riflessione o per rifrazione, . . . Riconosco di dover molto ai lumi dei signori Bernoulli, soprattutto al giovane attualmente professore a Groninga. Mi sono servìto alle loro scoperte ed a quelle di Leibniz. Per questo acconsento che rivendicihino tutto ciò che a loro piacerà, accontentandomi di quello che vorranno lasciarmi*.".

Quanto mérito mérita chi riesce a diffondere la Scienza altrui?

L'esposizione sistemàtica, diremmo conclusivamente completa, del calcolo infinitesimale ad òpera di Guillaume-Françoise-Antoine de l'Hopital, contenuta nel testo '*Analyse des infiniment petits*', ricomprende anche un'originale scoperta che oggi porta il suo nome: la régola per calcolare i lìmiti di alcune forme indeterminate.

Il Càlcolo Sublìme schiude le porte alla complèta anàlisi e soluzione di tutte le curve, esprimìbili con una equazione matemàtica, permettendo di calcolarne: la misura dello sviluppo, la direzione, i lìmiti, le aree racchiuse, le tangenti, le velocità di variazione, ... Questo nuovo método diventa così lo strumento essenziale, sino ad allora 'introvàbile', nello studio dei più importanti fenòmeni naturali, che avvengono con leggi rappresentabili da linee curve: le òrbite dei pianéti, la traiettoria dei proiettili, le deformazioni elàstiche, le linee del flusso di liquidi in movimento . . .).

Per dare un'ìdea di quale nuova potenza matemàtica potévano disporre coloro che studiavano i fenòmeni fisici, anticipiamo un passaggio, per l'Idraulica fondamentale: le '*Equazioni di Euler*'.

Riportare ora questo esempio è, invero, azzardato, ma resterà comunque ostico per molti anche quando comparirà 'al momento giusto'; lo proponiamo per far riecheggiare, anche in questo capitolo solo matemàtico, l'eco dell'Idraulica; la citazione, speriamo, è proposta anche perché si possa meglio comprendere, in términi squisitamente di sola percezione, le grandi possibilità che portò questo nuovo método di càlcolo.

Euler, cercando di dare espressione matemàtica al moto vario di un fluido causato da una forza esterna allo stesso fluido applicata, scompose tale forza nelle tre componenti spaziali, secondo il sistema cartesiano, P_x , Q_y, e R_z.

Il fluido in movimento è anche soggetto ad una forza interna, costituìta dalla pressione idrostatica, che può essere scomposta in p_x, p_y e p_z , tutte divise per la densità ρ.

Anche il movimento del fluido può essere espresso nelle tre componenti della velocità: u, v e w, sempre secondo le tre direzioni x, y e z..

Poiché la velocità, nel moto vario, cambia continuamente nel tempo, i valori dell'accelerazione non sono altro che la derivata della velocità nel tempo.

Applicando le régole della differenziazione, Euler individua le equazioni che rappresentano l'equilibrio dinàmico di un fluido in movimento, uguagliando le forze applicate e le conseguenti accelerazioni, secondo le tre direzioni cartesiane:

$$P_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p_x}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta u}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta u}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta u}{\delta z}$$

$$Q_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p_y}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta v}{dx} + v \cdot \frac{\delta v}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta v}{\delta z}$$

$$R_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta p_z}{\delta t} = \frac{\delta w}{\delta t} + u \cdot \frac{\delta w}{\delta x} + v \cdot \frac{\delta w}{\delta y} + w \cdot \frac{\delta w}{\delta z}$$

Sostituendo, ad ogni sìmbolo, l'espressione matemàtica di velocità, pressione e forza, in ogni caso studiato, ecco come il Càlcolo Sublìme lega le componenti dell'equilibrio dinàmico di un fluido in movimento.

Ora il problema è 'semplicemente' il descrivere ogni fenòmeno in linguaggio matemàtico, poi . . . il Càlcolo Sublìme darà vita ad ogni sua possibile interpretazione.

* * *

Prima di giungere alla definitiva stesura di questo Capitolo, ho voluto sottoporlo al giudizio di due miei cari amici, esperti nella materia, ottenendone suggerimenti e confortanti pareri.
Antìcipo, quindi, il ringraziamento a:

- Luisa Soteragno, professoressa di Matemàtica dell'Istituto di Istruzione Superiore '*Vittorio Bachelet*' di Abbiategrasso, Milano;
- Franco Bufàno, professore di Matemàtica all'Istituto Comprensivo '*Ubaldo Ferrari*' di Castelverde, Cremona.

Quanto resta di criticabile nel testo è da attribuìre alla sola mia responsabilità . . . i pareri sono sempre gradìti . . . ma non sempre e non tutti seguìti!

Stefano G. Loffi

* * *