

(10) Calibrazione del modello di flusso e risultati

Alberto Guadagnini⁽¹⁾, Laura Guadagnini⁽¹⁾, Monica Riva⁽¹⁾, Enrico Larcari⁽¹⁾, Enrico Orsi⁽¹⁾, Matteo Salmaso⁽¹⁾, Francesco Saraceni⁽²⁾

⁽¹⁾Dipartimento di Ingegneria Idraulica, Ambientale, Infrastrutture Viarie e Rilevamento, Politecnico di Milano, Milano

⁽²⁾ Dipartimento di Difesa del Suolo, Università degli studi della Calabria

10.1 Cenni di geostatistica

I sistemi idrici sotterranei sono mezzi naturalmente eterogenei le cui proprietà fisiche ed idrauliche, di conseguenza, sono caratterizzate da una notevole e complessa variabilità spaziale. E' spesso necessario affrontare, pertanto, l'aspetto relativo alla ricostruzione della distribuzione del parametro in esame sulla base di una serie di misure sperimentali. Sono proposti, in letteratura, diversi metodi di interpolazione. L'inverso della distanza, il metodo dei poligoni di Thiessen, l'interpolazione polinomiale o ai minimi quadrati sono esempi di tecniche di interpolazione. Queste tecniche non sono in grado, tuttavia, di eseguire una analisi preliminare della variabilità spaziale della grandezza in esame e non forniscono indicazioni sull'errore di stima e, conseguentemente, sull'incertezza di stima.

Le tecniche di analisi geostatistica consentono (1) di analizzare la struttura spaziale di una variabile idrogeologica all'interno di un dominio prefissato sulla base dei dati sperimentali disponibili, (2) di adottare un appropriato modello (probabilistico) rappresentativo dei caratteri di variabilità o continuità spaziale del parametro idrogeologico all'interno del dominio prefissato, (3) di effettuare la stima del parametro idrogeologico all'interno del dominio, (4) di valutare l'incertezza delle stime ottenute.

10.1.1 Fondamenti teorici

Nell'ambito dell'approccio geostatistico i parametri idrodinamici di un acquifero sono concettualizzati come "Variabili Regionalizzate" [VR]. Si tratta di grandezze la cui distribuzione spaziale non è completamente casuale, ma è caratterizzata da una struttura di correlazione. Le VR sono funzioni $z(x)$ definite su un dominio spaziale D che assumono valori dipendenti dal vettore posizione $x \equiv (x_u, x_v, x_w)$ in relazione ad una qualche "legge spaziale".

Sulla base della teoria delle variabili aleatorie, il valore in un punto $x_0 \in D$ di una generica VR è una realizzazione particolare di una variabile aleatoria VA che dipende dal punto e le infinite VA associate a tutti i punti x del dominio costituiscono una funzione aleatoria FA. Una VR $z(x)$, associata alla variabile idrodinamica in esame, è

una particolare realizzazione di una *FA* $Z(x)$. Il primo passo dell'analisi geostatistica consiste nell'individuazione della "legge spaziale" che governa la variabile di interesse nel dominio di studio. Sulla base dell'inferenza statistica è possibile studiare le auto e le mutue correlazioni spaziali della variabile di interesse a partire da un campione di osservazioni sperimentali. La struttura di correlazione spaziale viene successivamente utilizzata nell'algoritmo di interpolazione di kriging al fine di ottenere la stima della variabile di interesse in corrispondenza di un insieme di punti in cui non sono disponibili misure sperimentali. L'applicazione dell'algoritmo di kriging non richiede l'inferenza dell'intera legge spaziale $Z(x)$, ma unicamente la stima del valore atteso, della varianza e dei momenti bivariati (covarianza e/o variogramma) di $Z(x)$.

Le ipotesi di base sono le seguenti:

- *Ipotesi di ergodicità*: un processo si definisce ergodico se il valore atteso $E\{Z(x_0)\}$ di $Z(x)$ in un punto x_0 equivale alla media spaziale effettuata su una unica realizzazione;
- *Ipotesi di stazionarietà*: un processo si definisce stazionario se la sua legge di probabilità è invariante per traslazione cioè se le VA $\{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_k)\}$ e $\{Z(x_1 + h), Z(x_2 + h), \dots, Z(x_k + h)\}$, con h generico vettore tale che $x_1 + h, x_2 + h, \dots, x_k + h \in D$, hanno la stessa FDP k -variata. In genere si ritiene sufficiente che la stazionarietà del processo riguardi solo i primi due momenti della $Z(x)$ (stazionarietà debole).

Le ipotesi di ergodicità e di stazionarietà consentono di accedere all'inferenza della legge spaziale della *FA* $Z(x)$ a partire dall'unica realizzazione disponibile, costituita dal campione di misure sperimentali.

10.1.2 Calcolo dei variogrammi sperimentali

La struttura spaziale di una variabile viene tradizionalmente espressa in ambito geostatistico tramite il (semi)variogramma (o la covarianza). La stima della funzione semivariogramma viene effettuata sulla base dei dati provenienti dal campionamento del fenomeno in esame. I valori assunti dalla variabile in corrispondenza dei punti sperimentali, vengono utilizzati per il calcolo del semivariogramma sperimentale (*Figura 10.1.1*) espresso dalla relazione seguente:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2 \quad (10.1.1)$$

dove $N(h)$ è il numero di coppie di dati all'interno di D_s approssimativamente distanti $|h|$ (vettore che definisce la distanza di separazione denominato generalmente lag incrementale) lungo la prefissata direzione di indagine Φ . Il numero di coppie per n

punti campionari è dato dalla relazione $N(h) = n(n-1)/2$. Poiché difficilmente le coppie risulteranno separate da una distanza pari esattamente ad h ed allineate secondo la direzione Φ , al fine di poter disporre di classi di distanza sufficientemente rappresentate, si rende necessario introdurre una tolleranza Δh sulla distanza ed una tolleranza angolare $\Delta \Phi$. Contribuiranno, quindi, al calcolo del semivariogramma sperimentale, le coppie di dati localizzate ad una distanza reciproca compresa nell'intervallo $[h-\Delta h, h+\Delta h]$ e allineate secondo una direzione compresa nell'intervallo $[\Phi - \Delta \Phi, \Phi + \Delta \Phi]$. I valori delle tolleranze $\Delta \Phi$ e Δh dipendono dalla densità dei dati di cui si dispone, dalla loro localizzazione e dalla scala del problema. Se i dati sono numerosi e omogeneamente distribuiti è generalmente possibile utilizzare valori di tolleranza inferiori ed eseguire, conseguentemente, un calcolo più preciso del semivariogramma sperimentale. È comunque di uso abbastanza frequente calcolare i semivariogrammi sperimentali utilizzando distanze multiple di una distanza di base (*lag*) scelta in relazione alla distanza media fra i punti sperimentali ed impostare un valore di Δh pari a metà del lag. In assenza di informazioni preliminari relativamente alla presenza di anisotropie, è opportuno esplorare il campo lungo diverse direzioni (ad esempio ad intervalli di 45°). Il valore di tolleranza angolare dovrebbe soddisfare la duplice esigenza di essere sufficientemente ampio da garantire un numero adeguato di punti sperimentali all'interno del settore in esame e sufficientemente contenuta da garantire la direzionalità dell'indagine (solitamente non superiore a 30°). Una analisi variografica effettuata impostando una tolleranza angolare pari a 90° costituisce un'analisi omnidirezionale, che utilizza l'intero insieme di dati sperimentali. Nell'impostare una analisi direzionale è necessario quantificare un ulteriore parametro, la larghezza di bandwidth (*Figura 10.1.2.2*), che limita il calcolo del semivariogramma sperimentali ai punti localizzati all'interno di una fascia di larghezza pari al doppio della bandwidth stessa.

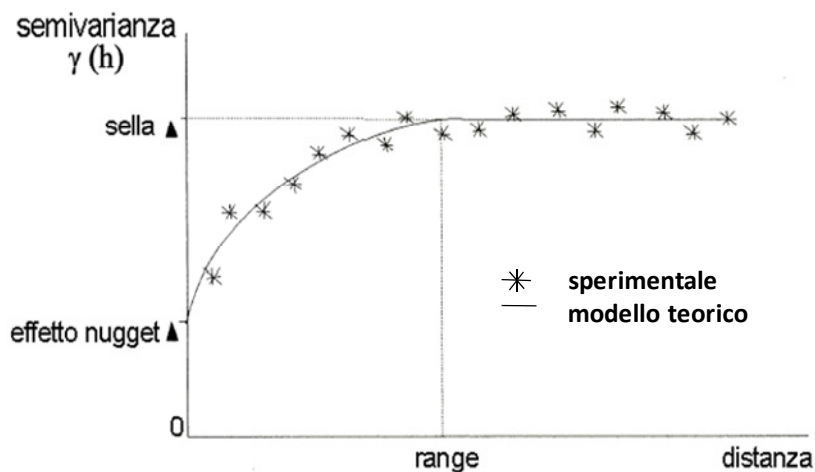


Figura 10.1.2.1: Esempio di semivariogramma sperimentale ed adattamento di un modello teorico di semivariogramma

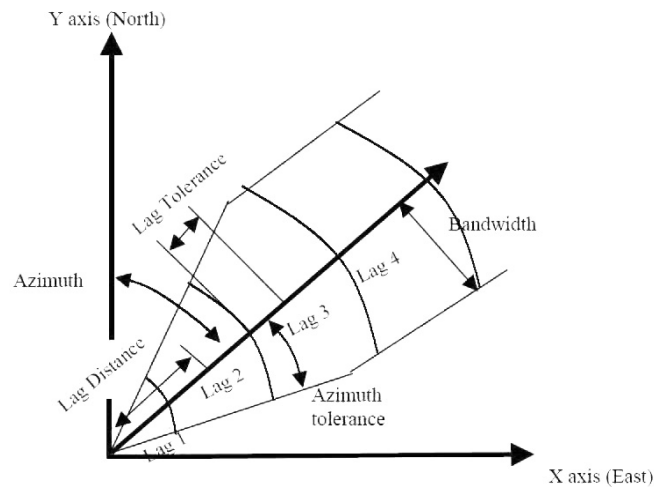


Figura 10.1.2.2: Elementi che intervengono nel calcolo di un semivariogramma sperimentale

L'andamento del semivariogramma sperimentale viene analizzato sulla base dei seguenti parametri:

- *Range*: all'aumentare della distanza di separazione tra le coppie di punti diminuisce il grado di correlazione dei valori assunti dalla variabile in esame. Il valore del semivariogramma, pertanto, tenderà generalmente ad aumentare fino a raggiungere un valore massimo. La distanza alla quale il semivariogramma raggiunge questo valore è chiamata *range*. Tale parametro identifica la massima distanza entro cui i dati possono ritenersi fra loro correlati.
- *Sill*: il valore massimo raggiunto dal semivariogramma in prossimità del range è chiamato *sill* (sella).
- *Nugget*: sebbene il valore del semivariogramma per una distanza $h=0$ sia strettamente pari a 0, alcuni fattori, fra cui l'esistenza di errori di campionamento o di variabilità a piccola scala, possono esplicitarsi con la presenza di una discontinuità in corrispondenza dell'origine. Tale discontinuità è detta *effetto nugget*.

Come precedentemente accennato, la variabile in esame può essere caratterizzata da anisotropia nella distribuzione spaziale. Si possono distinguere due principali tipologie di anisotropia: (1) anisotropia geometrica, quando il valore del range varia lungo diverse direzioni, ma rimane invariato il sill; (2) anisotropia zonale, quando il range rimane costante mentre il sill cambia con la direzione.

Sono disponibili diversi software dedicati all'analisi geostatistica bi o tridimensionale. Fra questi si citano GSLIB [Deutsch e Journel, 1998], Variowin [Pannatier, 1993], SGeMS [Remy et al., 2002].

10.1.3 Adattamento del modello teorico al semivariogramma sperimentale

Al semivariogramma sperimentale viene adattato un modello teorico espresso da una funzione analitica $\gamma(h)$. Essa permette di fornire un valore del modello di variabilità spaziale della VA considerata in funzione della distanza e dell'orientamento di una qualsiasi coppia di punti nello spazio.

Vengono di seguito indicati alcuni modelli di variogramma utilizzati per interpretare i semivariogrammi sperimentali:

- Modello di variogramma sferico

$$\gamma(h) = \begin{cases} c_0 + c_1 \left[1.5 \frac{h}{a} - 0.5 \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right] & \text{se } h \leq a \\ c_0 + c_1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10.1.2)$$

- Modello di variogramma esponenziale

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{3h}{a}\right) \right] \quad (10.1.3)$$

- Modello di variogramma Gaussiano

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{3h^2}{a^2}\right) \right] \quad (10.1.4)$$

Nel caso dei modelli esponenziale e gaussiano il valore del sill è raggiunto asintoticamente e la distanza entro cui esiste correlazione viene espressa dalla distanza alla quale viene raggiunto il 95% del sill (range effettivo).

- Variogramma sferico con la presenza di un Hole Effect

$$\gamma(h) = \begin{cases} c_0 + c_1 \left[1.5 \frac{h}{a_1} - 0.5 \left(\frac{h}{a_1} \right)^3 \right] + c_2 \left[1 - \cos\left(\frac{h}{a_2} \pi\right) \right] & \text{se } h \leq a \\ c_0 + c_1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (10.1.5)$$

- Variogramma con nugget puro

Come precedentemente indicato, i semivariogrammi sperimentali possono presentare una discontinuità in corrispondenza dell'origine. È possibile modellare tale discontinuità utilizzando un modello di transizione definito positivo che è zero quando $h=0$ e pari al nugget quando $h>0$.

Nelle Equazioni (10.1.2) – (10.1.5), c_0 è il nugget, c_i e a_i ($i = 1, 2$) rappresentano rispettivamente il sill ed il range, h è la distanza di separazione.

Il modello di variogramma sferico con la presenza di Hole Effect (*Figura 10.1.3*) è in grado di interpretare una struttura spaziale che segue un andamento sinusoidale che si attenua fino ad annullarsi per distanze superiori al range c_2 .

10.1.5 Algoritmo di Ordinary kriging

Il metodo di interpolazione stocastica di kriging si basa sulla formulazione di uno stimatore

(a) lineare perché la stima $Z^*(x_0)$ del valore di $Z(x)$ in un generico punto x_0 è espressa come combinazione lineare dei valori noti delle n osservazioni sperimentali disponibili attraverso n coefficienti di peso λ_i

$$Z_0^* = \sum_j \lambda_j z_j \quad (10.1.6)$$

(b) indistorto perché rispetta la condizione per cui lo scarto medio tra valori stimati e valori reali, cioè l'errore di stima medio, deve essere nullo

$$E[Z^*(x) - Z(x)] = 0 \quad (10.1.7)$$

(c) ottimale perché rispetta la condizione secondo cui la varianza estimativa, quindi la varianza dell'errore di stima, deve essere la minima possibile

$$Var[Z^*(x) - Z(x)] = \min \quad (10.1.8)$$

Imponendo e sviluppando analiticamente la condizione di correttezza si ottiene

$$\sum_j \lambda_j = 1 \quad (10.1.9)$$

La condizione di ottimalità conduce alla formulazione di un problema di minimizzazione di una funzione risolvibile imponendo la condizione che sia nulla la derivata della funzione rispetto alla variabile indipendente. Nel caso della funzione che esprime la varianza estimativa le variabili indipendenti sono gli N pesi λ_i dello stimatore. Effettuando le derivate parziali, e utilizzando il formalismo matematico dei moltiplicatori di Lagrange, si ottengono $N+1$ equazioni in $N+1$ incognite:

$$\sum_j^N \gamma_{ij} \lambda_j + \mu = \gamma_{i0} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N \quad (10.1.10)$$

dove per l' i -esima equazione

- $\gamma_{ij} = \gamma(h)$ con $h = x_i - x_j$, esprime il grado di non correlazione spaziale tra il punto x_i e gli altri punti di misura x_j ;
- $\gamma_{i0} = \gamma(h_0)$ con $h_0 = x_i - x_0$, esprime il grado di non correlazione spaziale tra il punto di misura x_i ed il punto $x_0 \in D$ in cui si vuole effettuare la stima di $Z(x)$;
- μ è il moltiplicatore Lagrangiano incognito.

Operando alcune sostituzioni si giunge all'espressione della varianza estimativa in funzione dei pesi λ_i :

$$\sigma_{Ki} = \sum_j^N \lambda_j \gamma_{j0} + \mu \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, N \quad (10.1.11)$$

In forma matriciale, il complesso di $N+1$ equazioni in $N+1$ incognite, derivanti dalle condizioni di correttezza ed ottimalità della stima, si scrive come la (10.1.12):

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1N} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \cdots & \gamma_{NN} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_N \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \cdot \\ \gamma_{N0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.1.12)$$

La risoluzione di tale sistema di equazioni lineari fornisce i valori dei pesi λ_i , ossia il peso che è necessario attribuire ad ogni dato sperimentale disponibile nel processo di stima del valore di $Z(x)$ in un generico punto x_0 .

Si può notare che:

- il peso di un generico ponderatore attribuito al generico dato sperimentale z_i sarà maggiore o minore a seconda che sia maggiore o minore il grado di correlazione spaziale tra il punto di misura x_i e x_0 ;
- il grado di correlazione spaziale tra x_i e x_0 non dipende dai valori che $Z(x)$ assume in essi, ma unicamente dalla loro reciproca posizione nello spazio.

10.1.5 Indicator kriging

L'Indicator kriging (kriging ad indicatori) consente di fornire una stima della probabilità che una variabile assuma un valore z_k in una data localizzazione. La variabile stocastica $Z(u)$ è trasformata in una variabile a indicatori con una distribuzione binaria che può essere esplicitata come di seguito indicato:

$$I(u; z_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } Z(u) \leq z_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \\ 0, & \text{altrove} \end{cases} \quad (10.1.13)$$

Il valore atteso di $I(u; z_k)$, condizionato dagli n dati circostanti, può essere espresso come,

$$E[I(u; z_k | (n))] = \Pr ob\{Z(u) \leq z_k | (n)\} = F(u; z_k | (n)) \quad (10.1.14)$$

$$P(u; z_k | (n)) = 1 - F(u; z_k | (n)) \quad (10.1.15)$$

dove $F(u; z_k | (n))$ è la funzione di distribuzione cumulativa condizionata di $Z(u) \leq z_k$, mentre $P(u; z_k | (n))$ è la probabilità che $Z(u) \leq z_k$. In un punto non campionato u_0 , la stima dell'indicatore $I^*(u_0; z_k)$ è data da:

$$I^*(u_0; z_k) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(z_k) I(u_j; z_k) \quad (10.1.16)$$

dove $I(u_j; z_k)$ rappresenta il valore dell'indicatore nel punto di misura u_j con $j = 1, 2, \dots, n$, e λ_j è il fattore di peso di $I(u_j; z_k)$ nella stima di $I^*(u_0; z_k)$.

Quindi, in riferimento all'analisi della localizzazione tri-dimensionale dei litotipi, la tecnica descritta fornisce la probabilità che in una data localizzazione (o in ciascuna cella di discretizzazione del dominio) sia presente il litotipo associato all'indicatore 1.

La stima tramite Indicator kriging risulta non condizionata e con minima varianza degli errori di stima e, analogamente a quanto indicato nel caso dell' algoritmo di Ordinary kriging, si ha che:

$$E[I^*(u_0; z_k) - I(u_0; z_k)] = 0 \quad (10.1.17)$$

$$Var[I^*(u_0; z_k) - I(u_0; z_k)] \text{ è minima.} \quad (10.1.18)$$

I pesi λ_j sono ottenuti dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j(z_k) \gamma_I(u_i - u_j; z_k) - \mu(z_k) = \gamma_I(u_i - u_0; z_k), \text{ to } n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j(z_k) = 1 \end{cases} \quad (10.1.19)$$

dove $\mu(z_k)$ è il moltiplicatore di Lagrange, $\gamma_I(u_i - u_j; z_k)$ specifica il valore del variogramma tra la variabile indicatore nel j -esimo punto di campionamento; $\gamma_I(u_i - u_0; z_k)$ è il valore del variogramma tra la variabile indicatore nell' i -esimo punto di campionamento u_0 .

10.2 Calibrazione del modello litologico. Il problema inverso: lo stato dell'arte

Il problema relativo alla stima dei parametri che governano un processo fisico interpretato tramite un modello può essere visto, matematicamente, come la relazione tra i parametri p che caratterizzano un modello e le osservazioni collegate, d

$$G(p) = d \quad (10.2.1)$$

dove G descrive la fisica del processo investigato.

Può essere utilizzato un modello diretto [Stallman, 1956], basato sulla sostituzione dei dati all'interno delle equazioni che governano il flusso che portano ad equazioni differenziali del primo ordine. Questo approccio può essere impiegato quando il numero dei parametri non noti risulta inferiore, o al limite uguale, al numero di equazioni alle differenze finite che risolvono il problema originale. Il metodo diretto tratta la conduttività come non nota e i carichi come noti seguendo lo spirito della formulazione di Cauchy. In questo modo il problema può essere affrontato senza effettuare iterazioni, ma richiede la conoscenza dei valori del carico su tutto il dominio, nello spazio e nel tempo. La soluzione, inoltre, risulta generalmente instabile.

Un diverso approccio consiste nella modellazione inversa. Questa tecnica consente di definire le caratteristiche dell'eterogeneità spaziale di parametri del sottosuolo (ad esempio permeabilità e/o trasmissività) o di dedurre le sollecitazioni al sistema (ad esempio ricarica, flussi, carichi,...) a partire da alcune "informazioni" che possono essere costituite da flussi, carichi idraulici o concentrazioni di contaminanti.

I metodi indiretti ammettono che le misure siano affette da errori o incertezze e ricercano i parametri del modello che minimizzano tali errori. L'approccio è chiamato indiretto perché il problema è non lineare sui parametri e viene risolto iterativamente attraverso la ripetizione delle simulazioni.

Una volta determinata la distribuzione spaziale iniziale della conduttività idraulica o della trasmissività, di fatto mai perfettamente calibrata, il problema può essere affrontato secondo due differenti approcci: (1) fissando la geometria e variando il valore di permeabilità all'interno dei volumi occupati da ciascun litotipo; (2) fissando il valore di permeabilità e variando la geometria della distribuzione. Mentre il primo è un approccio standard, il secondo permette la variazione graduale e continua del parametro considerato [de Marsily, 2005].

Il problema della stima opera con il concetto di insieme di parametri "ottimali" per un modello. La questione che si pone, innanzitutto, è il significato del termine ottimale. Possono essere ricavati diversi insiemi di parametri che interpretano e rappresentano correttamente la realtà. Diversi sono i metodi che si possono utilizzare per individuare l'"ottimo". In genere i parametri vengono definiti come il minimo di una funzione obiettivo. La conformità può ad esempio essere valutata attraverso le differenze

quadratiche, come nel caso di misure e valori calcolati di carico. Queste differenze quadratiche sono interpretate matematicamente da una norma (chiamata norma L_2). Sono disponibili altre norme, ad esempio il valore assoluto delle differenze tra valori misurati e calcolati (norma L_1). La norma L_2 è più sensibile agli outliers che L_1 , che al contrario è più difficile da trattare.

Usando la norma L_2 , la funzione obiettivo può essere scritta come

$$F_h = (h - h^*)^T C_h^{-1} (h - h^*) \quad (10.2.2)$$

dove C_h^{-1} è una matrice dei pesi. Quando F_h è usato come funzione obiettivo, il problema spesso diventa mal posto. La soluzione diventa instabile e diversi insiemi di parametri conducono a valori molto simili di F_h . Spesso il problema è legato a un'elevata sensibilità ai parametri iniziali che può tradursi nella non unicità della soluzione. Per superare questo problema è possibile fissare bande di variazione superiore e inferiore ai parametri da stimare, anche se questo non risolve totalmente la questione. La soluzione fluttua tra due bande arbitrarie, ma la sua attendibilità non migliora. Un'opzione consiste nell'aggiungere alla funzione obiettivo un ulteriore termine [Neuman, 1973]:

$$F = F_h + \lambda F_p \quad (10.2.3)$$

$$F_p = (p - p^*)^T C_p^{-1} (p - p^*) \quad (10.2.4)$$

Il termine F_p può essere visto come un termine di regolarizzazione. In questo caso, nell'equazione (10.2.2) il termine C_h^{-1} rappresenta la matrice di covarianza degli errori di misura. Il vantaggio della formulazione secondo la (10.2.3), in un ambiente statistico, è la possibilità di stimare anche l'incertezza associata alla stima dei parametri. La minimizzazione di una funzione obiettivo è complicata dal fatto che le relazioni tra le variabili di stato ed i parametri sono generalmente non lineari. I problemi inversi possono essere classificati come *lineari* e *non lineari*.

Un problema può essere linearizzato secondo la:

$$h(p) = h_0 + J_{hp} (p - p^*) \quad (10.2.5)$$

dove J_{hp} è la matrice Jacobiana (matrice di sensitività) che contiene le derivate di h rispetto a p . La differenza principale tra i metodi lineari e non lineari consiste nella caratterizzazione dei parametri statistici e nella valutazione dell'incertezza.

Molti codici di calcolo, negli algoritmi di ottimizzazione, lavorano in questo modo; ad esempio il codice *PEST* [Doherty, 2006], utilizzato nell'ambito del presente lavoro, segue lo schema di seguito indicato:

1. inizializzazione vettore dei parametri p^0 ;
2. risoluzione del problema diretto $h(p^i)$, calcolo della funzione obiettivo F^i e della matrice Jacobiana J_{hp} ;
3. calcolo del vettore degli aggiornamenti, possibilmente utilizzando le informazioni dedotte dalle iterazioni precedenti come la matrice Jacobiana ed il gradiente di questa [LaVenue e Ramarao, 1992];
4. aggiornamento dei parametri $p^{i+1} = p^i + d$;
5. se viene raggiunta la convergenza la procedura ha termine, altrimenti $i=i+1$ e la procedura riparte dal punto 2.

Il processo viene ripetuto fino ad ottenere la convergenza e, parallelamente, le stime dei parametri e della varianza degli errori. La misura dell'accuratezza dell'ottimo è la magnitudine del gradiente di J rispetto ai parametri, indicata con la norma $\|\nabla J\|$.

All'ottimo questa norma dovrebbe essere nulla. Un criterio proposto è che $\|\nabla J\|/\|\nabla J\|_0 <$ di un numero molto piccolo (esempio 10^{-6}) per un numero fissato di iterazioni (di solito 10) ($\|\nabla J\|_0$ è la norma del gradiente iniziale).

Il calcolo della matrice Jacobiana di sensitività è la quantità che richiede l'onere computazionale maggiore all'interno del processo di inversione. È comunque importante, per valutare l'attendibilità dell'inversione, la stima della sensitività. La sensitività è rappresentata dalle derivate delle variabili di stato rispetto ai parametri del modello. Possono essere sfruttate per due motivi: (1) possono essere utilizzate in molti metodi di ottimizzazione; (2) forniscono informazioni sull'attendibilità del modello e dei parametri stimati. La sensitività può essere ottenuta utilizzando tre diverse relazioni: (1) approssimazione delle derivate parziali attraverso le differenze finite; (2) derivazione diretta; (3) adjoint state method equations.

Il primo approccio, più comune [Porter e Hill, 2005; Doherty, 2002], è modello – indipendente e non richiede codici di calcolo aggiuntivi. Su questo tipo di approccio si basa il codice di ottimizzazione PEST [Doherty, 2006]. Il tempo di esecuzione del calcolo per il modello inverso può essere approssimato conoscendo il tempo necessario al problema diretto ed il numero di parametri N_p da stimare.

$$T_{inverse} = 2N_p \times T_{forward} \times (1 + N_p) \quad (10.2.6)$$

dove:

$(1 + N_p)$ è il numero di soluzioni per iterazione di stima dei parametri

$2N_p$ è una media delle iterazioni dei parametri

Il metodo di derivazione diretta richiede la risoluzione di un sistema simile alle equazioni nel tempo. Ad esempio, nel caso di moto stazionario, se l'equazione che governa il modello è $Ah = b$, la derivata sarà $A \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} h$.

Anche questa metodologia è disponibile per il calcolo parallelo. Sfortunatamente l'implementazione è impegnativa, specialmente se le equazioni che governano il processo sono complesse (ad esempio le equazioni dei momenti).

Infine, l'adjoint state method si basa sull'idea di minimizzare la funzione obiettivo come un problema di ottimizzazione con il rispetto di h e p , mentre si mantiene l'equazione di stato come una costrizione. Ad esempio, considerando il problema di moto stazionario $\Psi = Ah - b = 0$, può essere definita la funzione di Lagrange $L = J + \mu^T \Psi$ dove μ è il vettore dei moltiplicatori di Lagrange. La derivata è la seguente:

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dJ}{dp} = \frac{\partial J}{\partial p} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \left[\frac{\partial J}{\partial p} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right] \frac{dh}{dp} \quad (10.2.7)$$

M è arbitrario ed viene scelto in modo che $\frac{\partial J}{\partial p} + \mu^T \frac{\partial \Psi}{\partial p} = 0$ quindi

$$\mu^T A = -\frac{\partial J}{\partial h} = -2(h - h^*)^T C_h^{-1}.$$

La derivata della funzione di Lagrange diventa:

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dJ}{dp} = 2C_p^{-1}(p - p^*) + \mu^T \left(\frac{\partial A}{\partial p} h - \frac{\partial b}{\partial p} \right) \quad (10.2.8)$$

Allo stesso modo è possibile calcolare la matrice Jacobiana. Questo metodo richiede $N_h + 1$ run del modello diretto e quindi potrebbe essere più veloce (dell'approccio alle differenze finite) quando $N_p > N_h$ (o $N_p > N_h/2$ se si usa lo schema di differenze finite centrali).

Il costo computazionale della derivazione diretta e dell'adjoint methods può essere ridotto considerando anche che la matrice del sistema è identica per tutti i parametri.

Si può riassumere dicendo che la derivazione diretta e l'adjoint methods sono difficili da programmare (in relazione al metodo alle differenze finite), ma l'uso di queste metodologie può salvare il tempo della CPU (specialmente per i problemi non lineari).

La natura del problema diretto, quindi, può influenzare la scelta del calcolo delle derivate. Se questo è non lineare (ad esempio nel caso del flusso nel non saturo), l'onere computazionale del problema diretto è molto elevato.

Tra i metodi indiretti, i più utilizzati sono: (1) regressione dei minimi quadrati; (2) stima della massima verosimiglianza; (3) metodi Monte Carlo.

L'inversione con tecniche geostatistiche viene attualmente utilizzata nei problemi a scala relativamente piccola, come ad esempio l'interpretazione di test idraulici, mentre i modelli a grande scala tendono ad essere basati sulla zonizzazione [Carrera et al., 2005].

Si osserva, inoltre, che l'utilizzo del kriging nella determinazione della distribuzione spaziale iniziale di una proprietà del sottosuolo consente di ottenere un campo quasi calibrato che necessita di poche variazioni nel processo di inversione [Raoult, 1999].

L'utilizzo dell'approccio geostatistico all'interno di modelli di inversione è motivato dalla necessità di descrivere la variabilità delle proprietà idrauliche (in modo particolare la trasmissività) nella modellazione degli acquiferi. L'inversione con tecniche geostatistiche segue i passi proposti da Clifton e Neuman (1982). Un vantaggio nell'utilizzo di questa metodologia è la possibilità di ricavare informazioni riguardanti parametri statistici (varianza degli errori, misura della correlazione, etc..) per ottenere una buona stima.

Alcune delle tecniche geostatistiche di inversione sono [Zimmerman et al., 1998] la trasformata veloce di Fourier [Gutjahr e Wilson, 1989; Robin et al., 1993, Gutjahr et al., 1994], la simulazione frattale [Grindrod e Impey, 1991], il cokriging linearizzato [Kitanidis e Vomvoris, 1983; Hoeksema e Kitanidis, 1984; Kitanidis e Lane, 1985], il metodo semianalitico linearizzato [Dagan, 1985; Rubin e Dagan, 1987, 1992; Dagan e Rubin, 1988; Rubin, 1991a, b], la massima verosimiglianza [Carrera e Neuman, 1986a, b], il pilot point [RamaRao et al., 1995; LaVenue et al., 1995] e l'autocalibrazione sequenziale [Sahuquillo et al., 1992; Gomez-Hernandez et al., 1997; Capilla et al., 1997].

Si è notato come l'approccio geostatistico nell'inversione, soprattutto con l'utilizzo della tecnica nota come Pilot Point, conduca a risultati migliori nella determinazione della distribuzione spaziale delle proprietà del sottosuolo [Lavenue e Marsily, 2001].

Le difficoltà principali che si incontrano nei problemi di ottimizzazione sono date da: (a) non unicità della soluzione (problema mal posto), (b) non identificabilità della soluzione, (c) instabilità. Si aggiungono il costo computazionale in termini di CPU, il numero dei parametri da stimare ed infine la bassa sensitività. La soluzione risulta non identificabile quando non esiste un modello che interpreta esattamente i dati (perché il modello matematico risulta approssimato o perché i dati sono affetti da errori). La non unicità si ha quando il valore minimo della funzione obiettivo viene raggiunto da più insiemi di parametri. L'instabilità è presente se piccole variazioni nelle osservazioni conducono a grandi cambiamenti nella stima dei parametri. Questo è dovuto, solitamente, ad una dipendenza della soluzione dai parametri iniziali. Un problema inverso in cui compare questa condizione può essere definito mal posto o mal condizionato. L'instabilità può essere facilmente identificata e caratterizzata e sono proposte in letteratura diverse tecniche per affrontare il problema: (1) regolarizzazione della funzione obiettivo (10.2.3) imponendo particolari costrizioni alle possibili

soluzioni; (2) riduzione del numero di parametri; (3) incremento del numero e del tipo di dati; (4) ottimizzazione dello schema di osservazione. Anche risolvendo questa problematica, le ricerche effettuate mostrano come sia impossibile trovare una soluzione unica. Per tale motivo è stata esplorata la possibilità di ricorrere a tecniche differenti come le simulazioni stocastiche dei campi del parametro piuttosto che nella stima [Gomez-Hernandez *et al.*, 1997]. Le soluzioni di un modello inverso sono infinite ed è possibile restringere il campo delle stesse assegnando costrizioni all'inversione quali la regolarità, particolari zonizzazioni, algoritmi di unicità [Marsily *et al.*, 2005].

È stato osservato come il problema della stima della trasmissività da misure di carico in regime stazionario risulti mal posta, con eccezione nel caso in cui il sistema di flusso è forzato da una ricarica nota o da emungimento sufficientemente a produrre contorni chiusi del carico sulla regione di interesse [Dietrich e Newsam, 1990]. La stima dell'incertezza può essere quantificata attraverso approssimazioni lineari, approssimazioni non lineari e metodi Monte Carlo.

10.3 Criteri di selezione di un modello in un'analisi multi-modello

10.3.1 Cross-validazione

Una delle tecniche di validazione utilizzate per verificare l'attendibilità del modello di variogramma scelto è la cross-validazione [Isaaks e Srivastava, 1989].

Sia $Z(\mathbf{x})$ una Random Function stazionaria del secondo ordine avente covarianza $C(\mathbf{h})$ o semivariogramma $\gamma(\mathbf{h})$, e Z_1, \dots, Z_N i valori di $Z(\mathbf{x})$ in corrispondenza di N punti di misura $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$. La cross-validazione è un metodo per la valutazione dell'adeguatezza di un modello di semivariogramma.

Consiste nel sopprimere ciascuna misura Z_i e nello stimare tale valore utilizzando tutti gli altri valori misurati. La stima Z_i^* di Z_i viene ottenuta tramite Kriging come

$$Z_i^* = \sum_{m \in N_i} \lambda_{im} Z_m \quad (10.3.1)$$

dove N_i , $N = 1, 2, \dots, N$ è il sottoinsieme di punti utilizzati per stimare Z_i . λ_{im} rappresentano i pesi attribuiti a Z_m nella stima di Z in corrispondenza della posizione \mathbf{x}_i .

In termini di autocovarianza questi coefficienti sono le soluzioni delle :

$$\sum_{m \in N_i} \lambda_{im} C_{mn} + \mu_i = C_{in} \quad \text{per tutti gli } n \in N_i \quad (10.3.2)$$

$$\sum_{m \in N_i} \lambda_{im} = 1$$

dove $C_{mn} = C(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)$ e μ_i è il moltiplicatore di Lagrange corrispondente al punto i .

La covarianza V_{eij} di due errori $e_i = (Z_i^* - Z_i)$ e $e_j = (Z_j^* - Z_j)$ è data da

$$V_{eij} = C_{ij} + \sum_{m \in N_i} \sum_{n \in N_j} \lambda_{im} \lambda_{jn} C_{mn} - \sum_{m \in N_i} \lambda_{im} C_{mj} - \sum_{n \in N_j} \lambda_{jn} C_{ni} \quad (10.3.3)$$

Per $i=j$ si ottiene la varianza della stima σ_i^2

$$\sigma_i^2 = V_{eii} = \sigma^2 - \sum_{m \in N_i} \lambda_{im} C_{mi} - \mu_i \quad (10.3.4)$$

Ripetendo la procedura di stima in corrispondenza di M ($M \leq N$) localizzazioni si possono calcolare gli errori di cross-validazione

$$e_i = Z_i^* - Z_i \quad (10.3.5)$$

Il metodo consiste nel procedere per tentativi, utilizzando diversi insiemi di parametri di covarianza, fino a quando i risultati della cross-validazione (gli errori e_i e le varianze σ_i^2) presentano determinate proprietà statistiche. Si deve osservare, quindi, che la procedura descritta richiede la conoscenza della forma della funzione di covarianza. In pratica, è necessario procedere per successive approssimazioni partendo da una stima iniziale della funzione. Il variogramma sperimentale può essere utilizzato per la scelta della stima iniziale dei parametri di covarianza che, successivamente, verranno corretti fino ad ottenere risultati della cross validazione caratterizzati da proprietà desiderate. Tali proprietà sono:

(a) errore medio ME prossimo a zero

$$ME = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i \cong 0 \quad (10.3.6)$$

dove M è il numero delle localizzazioni in corrispondenza delle quali viene eseguita la cross-validazione. Si deve osservare che l'errore medio non è molto utile per la stima del semivariogramma, perché il Kriging è uno stimatore indistorto. Ciò assicura che $E(e_i) = 0$ per tutti gli i e, quindi, $E(ME) = 0$

(b) errore quadratico medio (MSE) minimo [Delhomme, 1978]

$$MSE = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e_i^2 = \text{minimo} \quad (10.3.7)$$

Poiché l'errore medio può non essere uguale a zero, MSE non coincide necessariamente con la varianza degli errori VE . Questa varianza è relazionata a MSE e ME dalla

$$VE = MSE - ME \quad (10.3.8)$$

In pratica, ME è prossima a zero e VE e MSE sono circa uguali.

(c) errore quadratico medio adimensionale ($DMSE$) prossimo a 1

$$DMSE = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left(\frac{e_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cong 1 \quad (10.3.9)$$

Poiché σ_i^2 è la varianza di e_i , $E(e_i^2) = \sigma_i^2$ il valor atteso del quadrato di $DMSE$ è pari a 1. Quest'ultima condizione può essere interpretata anche come un controllo della consistenza fra gli errori calcolati (e_i) e la deviazione standard σ_i stimata tramite Kriging [Delhomme, 1978].

(d) varianza media del Kriging (AKV) minima

$$AKV = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_i^2 = \text{minimo} \quad (10.3.10)$$

(e) varianza media del Kriging uguale alla varianza degli errori di cross-validazione

$$AKV = VE \quad (10.3.11)$$

(f) errori e_i scorrelati con i valori di $Z_i^* - Z_i^{\wedge}$ dove Z_i^{\wedge} rappresenta la media locale della variabile nelle vicinanze del punto i . Si osserva che quando la media della RF è nota, gli errori e_i e i valori krigati Z_i^* sono scorrelati [Journel e Huijbreghts, 1978]. Quando la media non è nota, gli errori sono scorrelati con $Z_i^* - Z_i^{\wedge}$ [Journel, 1980]. Quindi, la condizione è espressa dalla

$$E[(Z_i^* - Z_i)(Z_i^* - Z_i^{\wedge})] = 0 \quad (10.3.12)$$

(g) coefficiente di correlazione ρ dei valori krigati e misurati prossimo a 1

$$\rho_{Z_i^*, Z_i} = 1 \quad (10.3.13)$$

(h) gli errori $(Z_i^* - Z_i)$ o gli errori normalizzati $(Z_i^* - Z_i)/\sigma_i$, devono allinearsi su una carta di probabilità normale [Starks e Fang, 1982]. Questo significa che e_i/σ_i devono essere gaussiani con media nulla e varianza unitaria.

Questo è vero quando la variabile originaria $Z(x)$ è Gaussiana, ma, in generale, non è necessario che gli errori normalizzati siano distribuiti normalmente.

10.3.2 Model Validation Criteria (KIC, BIC, AIC, AIC_C) e Posterior Criteria

L'approccio consiste nel postulare differenti modelli alternativi per il sito interessato e applicare a posteriori criteri di selezione (*model selection criteria* anche detti *model discrimination* o *information theoretic criteria*) in modo da classificare in ordine di importanza i modelli, eliminare alcuni di questi e/o pesare e mediare i risultati ed i dati statistici generati dai diversi modelli. I criteri di discriminazione più utilizzati sono, ad esempio, AIC [Akaike, 1974], AIC_C [Hurvich e Tsai, 1989], BIC [Schwarz, 1978], KIC [Kashyap, 1982]. Tali criteri discriminano tra diversi modelli in base a come meglio questi riproducono le osservazioni sperimentali utilizzando un criterio di massima verosimiglianza (maximum likelihood) delle stime dei parametri del modello (favorendo il modello che riproduce il comportamento osservato in maniera migliore) e considerando il numero di parametri contenuti nel modello (penalizzando i modelli che richiedono la stima di un maggior numero di parametri). Il KIC considera la verosimiglianza delle stime dei parametri a partire dai valori di primo tentativo (quando questi sono disponibili) e contiene un termine, la matrice di informazione di Fisher (Fisher information matrix term), non considerato dagli altri criteri.

I modelli cui risulta associato il valore inferiore di un dato criterio sono più affidabili rispetto a quelli a cui si associa un valore più elevato.

Considerando un insieme M di k diversi modelli interpretativi, M_k , $k = 1, 2, \dots, K$, i parametri AIC , $AICc$, BIC , KIC sono definiti per il modello M_k come di seguito:

$$AIC_k = -2 \ln \left[L \left(\hat{\beta}_k \mid z^* \right) \right] + 2N_k \quad (10.3.14)$$

$$AICc_k = -2 \ln \left[L \left(\hat{\beta}_k \mid z^* \right) \right] + 2N_k + \frac{2N_k(N_k + 1)}{N_z - N_k - 1} \quad (10.3.15)$$

$$BIC_k = -2 \ln \left[L \left(\hat{\beta}_k \mid z^* \right) \right] + N_k \ln N_z \quad (10.3.16)$$

$$KIC_k = -2 \ln \left[L \left(\hat{\beta}_k \mid z^* \right) \right] - 2 \ln p \left(\hat{\beta}_k \right) + N_k \ln \frac{N_z}{2\pi} + \ln |\overline{F}_k| \quad (10.3.17)$$

dove $\hat{\beta}_k$ è il maximum likelihood (ML) stimato di un vettore β_k degli N_k parametri da valutare del modello M_k (che potrebbe includere parametri statistici dei dati di calibrazione); z^* è un vettore delle osservazioni di N_z variabili (idrologiche) casuali z del sistema, nello spazio e nel tempo; $-\ln \left[L \left(\hat{\beta}_k \mid z^* \right) \right]$ è il minimo della funzione *negative log-likelihood (NLL)* $-\ln [L(\beta_k \mid z^*)]$ che ricorre, per definizione, a $\hat{\beta}_k$; $p(\hat{\beta}_k)$ è la probabilità a priori di β_k valutata per $\hat{\beta}_k$; $\overline{F}_k = F_k / N_z$ è la matrice delle informazioni di Fisher F_k normalizzata (rispetto a N_z) e osservata (implicitamente condizionata dalle osservazioni z^* e valutata per il parametro di maximum likelihood $\hat{\beta}_k$), avente elementi [Kashyap, 1982]

$$\overline{F}_{k,ij} = \frac{1}{N_z} F_{k,ij} = - \frac{1}{N_z} \frac{\partial^2 \ln - \ln [L(\beta_k \mid z^*)]}{\partial \beta_{ki} \partial \beta_{kj}} \Big|_{\beta_k = \hat{\beta}_k} \quad (10.3.18)$$

Il primo termine di ogni criterio, $-2 \ln \left[L \left(\hat{\beta}_k \mid z^* \right) \right]$, misura la bontà dell'adattamento

tra valori osservati e stimati delle condizioni del sistema, \hat{z} e z^* rispettivamente; il valore inferiore identifica l'adattamento migliore. I termini che contengono N_k

rappresentano la misura della complessità del modello. I criteri introdotti prendono in considerazione (a vari livelli) il principio di parsimonia, penalizzando i modelli caratterizzati da un numero elevato di parametri se a questi non corrisponde un miglioramento nell'adattamento del modello.

Espressioni equivalenti alle (10.3.14) – (10.3.17) sono implementati in diversi codici utilizzati per l'inversione di processi idrogeologici, quali ad esempio PEST [Doherty, 2006] e MODFLOW2000 [Hill et al., 2000].

AIC è basato sull'informazione di Kullback – Leibler [Akaike, 1974; Linhart e Zucchini, 1986; Bozdogan, 1987] e, quindi, sulla misura della discrepanza tra una rappresentazione della realtà (modello) vera, ma non conosciuta, dalla quale si ricavano le osservazioni z^* , ed una rappresentazione approssimata della stessa realtà. Se N_z/N_k decresce, *AIC* diventa progressivamente più condizionato, proprietà perfezionata dall'*AICc*. È conveniente usare *AICc* quando N_z/N_k è minore di 40. *BIC* è stato derivato in un contesto Bayesiano come un'approssimazione asintotica ad una trasformazione di una probabilità a posteriori di un modello candidato. È stato notato in molti campioni [Cavanaugh e Neath, 1999] che *BIC* favorisce il modello che è a posteriori più probabile e che quindi risulta il più plausibile in relazione ai dati disponibili. Assumendo che i dati siano generati da un modello che appartiene ad un insieme di modelli candidati e che rende *BIC* consistente (la dimensione del campione N_z aumenta tendendo a N_k), il criterio tende ad identificare questo generatore come un modello vero con probabilità uno.

Anche il *KIC* è derivato da un contesto Bayesiano come un'approssimazione asintotica al modello di likelihood. Come il *BIC*, il *KIC* è stato originariamente derivato dall'assunzione che il modello (vero), avendo generato alcuni dati, appartiene all'insieme dei modelli candidati tra cui scegliere quello esatto. *KIC* è asintotico nel senso che l'approssimazione migliora verso $p\left(z^* | \beta, M_k\right)$ diventando più simile a $\hat{\beta}_k$;

questo generalmente accade all'aumentare delle N_z osservazioni. È stato proposto di utilizzare il *KIC* nel contesto del maximum likelihood BMA (MLBMA) [Neuman, 2003]. Si è osservato che il *KIC* tende asintoticamente al *BIC* quando N_z è elevato rispetto a N_k ($N_z/N_k \rightarrow \infty$). In caso contrario il *BIC* può indicare migliori i modelli caratterizzati da un numero inferiore di parametri. In questo caso il *KIC* è il criterio più appropriato da utilizzare. È stato notato che se $N_z > 8$, il termine $N_k \ln N_z$, che penalizza il criterio (10.3.16) nel *BIC*, è maggiore di $2N_k$, che penalizza l'*AIC*. Il primo, quindi, si colloca più in rilievo nella parsimonia rispetto al secondo.

Si osserva, inoltre, che il *BIC* (e di conseguenza al *KIC*) assume uno dei modelli presi in considerazione come vero, dunque il *BIC* e il *KIC* sono inappropriati nelle applicazioni in cui i modelli sono, per necessità, semplificazione della realtà.

La differenza principale tra AIC , $AICc$, e BIC rispetto a KIC consiste nella presenza del termine informativo di Fisher $\ln|\overline{F}_k|$. Per spiegarne l'importanza, si può considerare un vettore casuale degli scarti $\varepsilon^* = z^* - z$ distribuito seguendo un andamento Gaussiano con media nulla e matrice di covarianza C_z . Tale vettore può essere considerato il vettore stocastico o deterministico delle osservazioni vere mentre z^* come il vettore del campione dei valori stocastici di z o come il vettore dei valori reali di z corretti dagli errori. Scrivendo $C_z = TT^T$ dove T è una matrice triangolare superiore o inferiore (sono possibili anche altre scomposizioni), si può scrivere $\varepsilon^* = T\zeta^*$, dove ζ^* è un vettore casuale delle mutue componenti scorrelate avente media nulla e varianza unitaria. Quindi, la somma dei quadrati pesati $\varepsilon^{*T} C_z^{-1} \varepsilon^*$ che entra nel Gaussian likelihood

$$L(\beta | z^*) = p(z^* | \beta) = (2\pi)^{-N_z/2} |C_z|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon^{*T} C_z^{-1} \varepsilon^*\right) \quad (10.3.19)$$

può essere sostituita dalla somma di quadrati $\zeta^{*T} \zeta^*$ le cui componenti sono indipendenti ed identicamente distribuite. Si può quindi scrivere $\ln|\overline{F}_k|$ come la (10.3.18).

Se le informazioni contenute nelle osservazioni, come espresso dal termine $\ln|\overline{F}_k|$, non variano da modello a modello, il KIC premia i modelli in funzione della qualità dell'adattamento tra i dati stimati e quelli osservati (come misurato dal $NLL - 2\ln\left[L(\hat{\beta}_k | z^*)\right]$, comune ai quattro criteri) e tra i parametri stimati a posteriori ed i

valori iniziali (come misurato da $-2\ln p(\hat{\beta}_k)$), che, come precedentemente indicato,

non è incluso nel BIC e non appare essere una valida componente dell' AIC e dell' $AICc$. Allo stesso tempo il KIC penalizza i modelli in proporzione al loro numero di parametri

N_k attraverso il termine $N_k \ln \frac{N_z}{2\pi}$, che differisce dai corrispondenti termini del BIC ,

AIC e $AICc$ e dipende in maniera minore dalla dimensione del campione N_z rispetto al BIC (in cui il termine corrispondente è $N_k \ln N$). Inoltre, il KIC è consistente con il criterio proposto da Fisher[1922]. Se all'aumento del contenuto informativo di un modello non corrisponde un miglioramento delle sue capacità rispetto ad un altro modello, la selezione di un modello con un contenuto informativo maggiore, in accordo con il KIC , può essere non giustificata.

La presenza di $\ln|\overline{F}_k|$ nel KIC è il motivo principale della preferenza di questo criterio rispetto agli altri perché permette la discriminazione tra i modelli non basandosi

unicamente sull'adattamento alle osservazioni e sul numero di parametri, ma anche su quanto i parametri stimati a posteriori sono vicini ai loro valori di primo tentativo e quante informazioni attese sono contenute in ogni osservazione.

Ai fini pratici, è importante conoscere il valore del *negative log-likelihood* (NLL).

Esprimendo la matrice di covarianza degli errori sulle osservazioni come $C_z = \sigma^2 \omega^{-1}$ [Carrera e Neuman, 1986a; Hill, 1998] dove ω è una matrice di pesi nota e σ^2 è la varianza degli errori, nota o non nota, si può scrivere

$$-2 \ln[L(\beta_k | z^*)] = N_z \ln(2\pi) + N_z \ln \sigma^2 + \ln|\omega^{-1}| + \frac{\varepsilon^{*T} \omega \varepsilon^*}{\sigma^2} \quad (10.3.20)$$

Se σ^2 è noto, $\beta_k = \theta_k$ dove θ_k è un vettore che contiene i P_k parametri idrologici del modello così che $N_k = P_k$, mentre se σ^2 non è noto si considera un vettore $\beta_k = \{\theta_k, \sigma^2\}$ di dimensione $N_k = P_k + 1$.

Considerando $\hat{\sigma}_{ML}^2 = \frac{SSR_k}{N_z}$ con SSR_k la funzione obiettivo del modello e apportando opportune sostituzioni alla (10.3.19) [Ye et al., 2008] si ottiene

$$-2 \ln[L(\beta_k | z^*)] = NLL_k = N_z \ln(2\pi) + N_z \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 + \ln|\omega^{-1}| + N_z \quad (10.3.21)$$

I termini $N_z \ln(2\pi)$, $\ln|\omega^{-1}|$ e N_z sono costanti (indipendenti dalla scelta del modello o dei parametri) quindi non influenzano la selezione del modello o il relativo peso. Sostituendo la (10.3.8) e $N_k = P_k + 1$ in (10.3.14) – (10.3.17) ed escludendo le costanti si arriva a

$$AIC_k = N_z \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 + 2P_k \quad (10.3.22)$$

$$AICc_k = N_z \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 + 2P_k + \frac{2N_k(N_k + 1)}{N_z - N_k - 1} \quad (10.3.23)$$

$$BIC_k = N_z \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 + P_k \ln N_z \quad (10.3.24)$$

$$KIC_k = N_z \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 - 2 \ln p(\hat{\theta}_k) - P_k \ln 2\pi - \ln|\Sigma_k| \quad (10.3.25)$$

con $2\ln p\left(\hat{\theta}_k\right)$ trascurato quando non sono disponibili informazioni a priori riguardanti i parametri idrologici. $J_k^T \omega J_k = \overline{F}_k$ è il termine di Fisher dove J_k è la matrice Jacobiana (sensitività) avente elementi $J_{kij} = -\partial z_i / \partial \theta_{kj} \big|_{\theta_k = \hat{\theta}_k}$.

Considerando $\ln|\Sigma_k| = P_k \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 - \ln|J_k^T \omega J_k|$ si ottiene

$$KIC_k = (N_z - P_k) \ln \hat{\sigma}_{ML}^2 - P_k \ln 2\pi + \ln|J_k^T \omega J_k| \quad (10.3.26)$$

Il termine $\ln|\Sigma_k|$ è uno dei risultati che il codice di ottimizzazione PEST [Doherty, 2006] restituisce all'interno della sezione *Parameter covariance matrix*.

Affinché sia possibile confrontare diversi criteri di discriminazione di modelli, si possono tradurre i valori di *AIC*, *AICc*, *BIC* e *KIC* associati a ciascun modello in un posterior model weight, $p(M_k | z^*)$, che nel caso di *BIC* e *KIC* rappresenta una probabilità a posteriori del modello [Ye et al., 2004]. I pesi a posteriori del modello possono essere calcolati, come proposto da Tsai et al. [2008] come segue:

$$p(M_k | z^*) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \alpha \Delta IC_k\right) p(M_k)}{\sum_{i=1}^K \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha \Delta IC_i\right) p(M_i)} \quad (10.3.27)$$

dove $\Delta IC_k = IC_k - IC_{\min}$, IC_k è il *KIC* o un altro model selection criterion, $IC_{\min} = \min\{IC_k\}$ è il minimo sui modelli, $p(M_k)$ è la probabilità a priori del modello e

$\alpha = \frac{s_1}{s_2 \sigma_D}$ è un fattore di scala. Questo parametro tiene conto di s_1 che rappresenta ΔIC_k

corrispondente ad un dato livello di significatività [Madigam e Raftery, 1994; Raftery, 1995, Hoeting et al., 1999] e s_2 il peso della finestra di varianza, in unione con σ_D ,

dove $\sigma_D^2 = 2N$ è la varianza di IC_k . Un livello di significatività del 5 % corrisponde a $s_1 = 6$ e una dimensione della finestra di $4\sigma_D$ i.e., $s_2 = 4$ e in questo modo $\alpha = 6/4\sqrt{2N} = 5.05 \times 10^{-2}$.

Per rendere l'analisi neutrale si pone la probabilità a priori $p(M_k)$ di ognuno dei modelli pari ad $1/n$ dove n è il numero di modelli.

Questo sta alla base del concetto di Bayesian Model Averaging (BMA) [Neuman, 2003]. Il BMA cerca un meccanismo coerente per stimare l'incertezza di un modello per ovviare alle problematiche insite nei metodi statistici standard che ignorano l'incertezza del modello e, quindi, al rischio legato alla scelta dello stesso. Se z è una

quantità che si vuole stimare, la distribuzione a posteriori data da un insieme discreto di dati z^* può essere scritta come

$$p(z | z^*) = \sum_{k=1}^K p(z | M_k, z^*) p(M_k | z^*) \quad (10.3.28)$$

dove $M = (M_1, \dots, M_K)$ è l'insieme di modelli (o di ipotesi) considerati. In altre parole, $p(z | z^*)$ è la media delle distribuzioni a posteriori $p(z | M_k, z^*)$ per ogni M_k , pesato dalla probabilità a posteriori del modello $p(M_k | z^*)$. La probabilità a posteriori del modello M_k è data dalla regola di Bayes:

$$p(M_k | z^*) = \frac{p(z^* | M_k) p(M_k)}{\sum_{l=1}^K p(z^* | M_l) p(M_l)} \quad (10.3.29)$$

dove

$$p(z^* | M_k) = \int p(z^* | \beta_k, M_k) p(\beta_k | M_k) d\beta_k \quad (10.3.30)$$

è la verosimiglianza in forma integrale del modello M_k , β_k è il vettore di parametri associati al modello M_k , $p(\beta_k | M_k)$ è la densità a priori di β_k sotto il modello M_k , $p(\beta_k | M_k) d\beta_k$ è la joint likelihood del modello M_k con il suo parametro β_k , e $p(M_k)$ è la probabilità a priori che M_k sia il modello corretto (per rendere l'analisi neutrale, questo viene posto uguale per ogni modello). Tutte le probabilità sono implicitamente condizionate in M .

La media a posteriori e la varianza di z sono [Draper, 1995]:

$$E[z | z^*] = \sum_{l=1}^K E[z | z^*, M_l] p(M_l | z^*) \quad (10.3.31)$$

$$Var[z | z^*] = \sum_{l=1}^K \{Var[z | z^*, M_l] + E[z | z^*, M_l]^2\} p(M_l | z^*) - E[z | z^*]^2 \quad (10.3.32)$$

In accordo con le teorie precedenti [Hoeting et al., 1999], lavorare con più modelli è più affidabile che fare riferimento ad un singolo modello, M_k , condizionato in M . Si osserva che alcuni fattori rendono l'applicazione del BMA come un sistema complesso e difficoltoso, soprattutto per le condizioni che si sviluppano in idrologia:

- il numero di modelli potenzialmente applicabili potrebbe essere eccessivamente elevato, rendendo la loro esaustiva inclusione in (10.3.28) non fattibile;
- la forma integrale (10.3.30) potrebbe essere difficile da valutare;

c. la stima di probabilità a priori $p(M_k)$ per un modello è impegnativa.

Un metodo pratico per eliminare la prima difficoltà è di mediare su un sottoinsieme di modelli supportati da dati. La strategia è stata inizialmente sviluppata da *Madigan e Raftery* [1994] con la conclusione che la media è limitata dal set relativamente più piccolo dei più parsimoniosi modelli che sono fortemente supportati da dati idrologicamente plausibili.

10.4 Analisi della distribuzione spaziale dei litotipi ed attribuzione dei valori di conducibilità idraulica

10.4.1 Ricostruzione delle superfici limite del modello

Come accennato nel *Capitolo 7*, è stata condotta, a partire dalle informazioni disponibili all'interno delle colonne stratigrafiche, una analisi volta alla stima dell'andamento spaziale di base e tetto dello spessore intermedio e base del sistema acquifero modellato. L'analisi è stata svolta tramite: (a) analisi variografica dei dati associati a ciascuna superficie [*Deutsch e Journel*, 1998], (b) interpretazione dei dati sperimentali attraverso l'adattamento di diversi modelli teorici di semivariogrammi e (c) interpolazione dei valori puntuali di ciascuna superficie attraverso un algoritmo di Ordinary kriging utilizzando il modello di semivariogramma che meglio è risultato interpretare i dati sperimentali.

Si sono inizialmente ricostruiti i semivariogrammi (o variogrammi) sperimentali relativi alle quote (misurate rispetto al livello del mare) delle superfici di separazione tra gli orizzonti principali individuati dalle colonne stratigrafiche. I variogrammi sperimentali sono risultati caratterizzati da una componente di deriva attribuibile al fatto che le quote decrescono in direzione Nord - Sud. Tale componente di deriva è stata eliminata eseguendo l'analisi variografica sugli scostamenti (residui) dei valori sperimentali rispetto ad un piano interpolante. Nell'equazione del piano interpolante, $Z = A + Bx + Cy$, i parametri A , B , C sono stati stimati attraverso il metodo dei minimi quadrati. I parametri ottenuti per le tre superfici di separazione sono indicati nella *Tabella 10.4.1.1*

Tabella 10.4.1.1: Parametri del piano interpolante le quote sperimentali delle superfici limite

	A	B	C
base sistema			
acquifero modellato	-91.62	-1.80E-03	4.02E-03
base spessore			
intermedio	-32.65	-9.99E-04	3.93E-03
tetto spessore			
intermedio	-27.99	-9.94E-04	4.08E-03

E' stata condotta una analisi di sensitività al fine di individuare l'influenza dei parametri (a) Lag Separation, (b) Angle Tolerance e (b) Bandwidth sull'andamento dei semivariogrammi sperimentali. A seguito di tale analisi, si è scelto di adottare valori dei parametri Lag Separation, Angle Tolerance e Bandwidth rispettivamente pari a 2000 m, 90° e 25 km.

E' stata inoltre analizzata la presenza di eventuali anisotropie attraverso il confronto fra semivariogrammi calcolati lungo le direzioni 0, 45, 90, 135° (rispetto alla direzione Nord-Sud). L'analisi direzionale non ha evidenziato l'esistenza di anisotropie. A titolo di esempio, la *Figura 10.4.1.1* mostra l'insieme dei semivariogrammi direzionali calcolati per il tetto dello spessore intermedio.

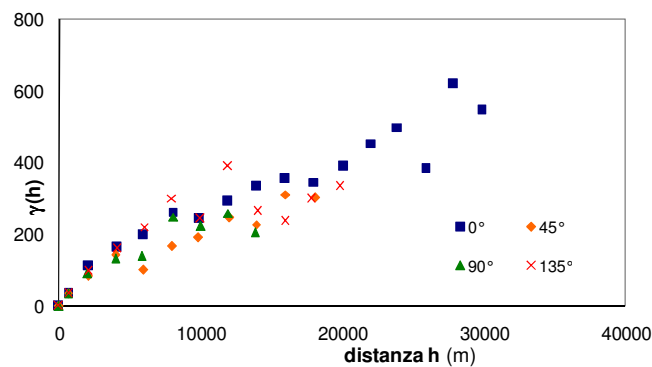


Figura 10.4.1.1: Semivariogrammi direzionali calcolati per il tetto dello spessore intermedio

L'analisi variografica è stata eseguita utilizzando il software *GSLIB* [Deutsch e Journel, 1998].

E' stato successivamente valutato l'adattamento ai semivariogrammi sperimentali di modelli di tipo sferico, esponenziale, gaussiano.

I parametri dei modelli sono stati stimati con l'ausilio del software di ottimizzazione *PEST* [Doherty, 2006]. La scelta del modello interpretativo è stata effettuata a posteriori sulla base di criteri di discriminazione di modelli. Sono stati considerati diversi criteri nell'ambito della teoria di stima basata sul criterio di massima verosimiglianza (maximum likelihood). Tra questi, si è scelto il criterio di Kashyap, o *KIC* [Kashyap, 1982]. La *Tabella 10.4.1.2* riporta i valori del *KIC* ottenuti per i modelli investigati.

Tabella 10.4.1.2: Valori del *KIC* valutati per ciascuno dei modelli utilizzati per interpretare i semivariogrammi sperimentali relativi ad ogni singola superficie

	<i>KIC</i>		
	Modello Sferico	Modello Esponenziale	Modello Gaussiano
tetto spessore intermedio	204	203	205
base spessore intermedio	200	199	201
base sistema acquifero modellato	288	287	-

Si nota che i valori del *KIC* sono molto simili per tutti i modelli utilizzati, suggerendo che non è identificabile un modello marcatamente superiore agli altri.

Anche a seguito dell'analisi dei campi interpolati e delle varianze degli errori di stima associati, si è scelto di adottare un modello esponenziale per base e tetto dello spessore intermedio e un semivariogramma sferico per la base del sistema acquifero modellato.

La *Tabella 10.4.1.3* riporta i valori dei parametri stimati associati ai modelli adottati, mentre le *Figure 10.4.1.2*, *10.4.1.3* e *10.4.1.4* riportano i semivariogrammi sperimentali e il corrispondente modello interpretativo adottato.

Tabella 10.4.1.3: Valori dei parametri relativi ai modelli adottati per interpretare i semivariogrammi sperimentali associati a ciascuna superficie

Superficie	Modello	Parametri stimati		
		Nugget (m^2)	Sill (m^2)	Range (m)
tetto spessore intermedio	Esponenziale	0	315	16786
base spessore intermedio	Esponenziale	0	305	13404
base sistema acquifero modellato	Sferico	0	2562	6484

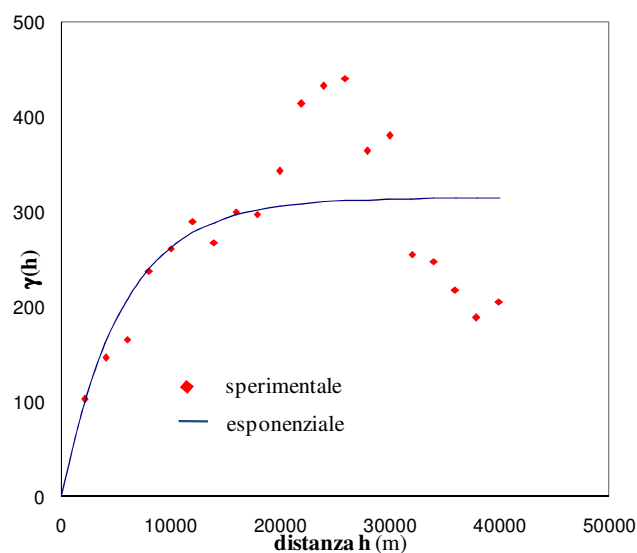


Figura 10.4.1.2: Tetto dello spessore intermedio - Semivariogramma sperimentale e modello esponenziale

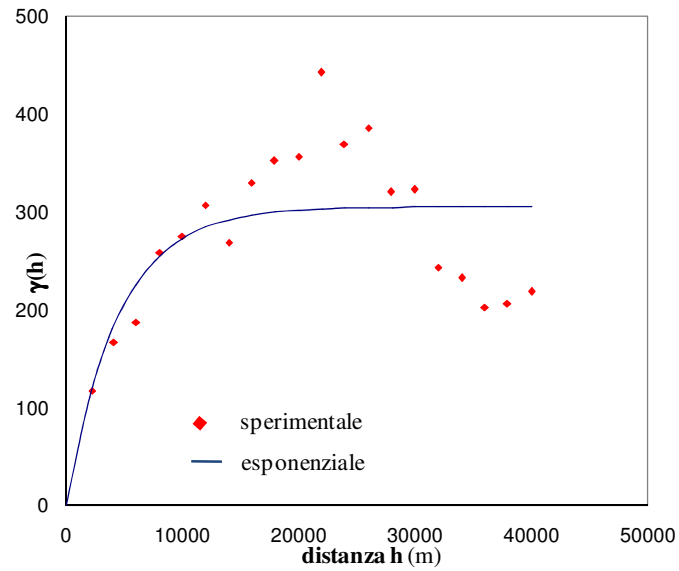


Figura 10.4.1.3: Base dello spessore intermedio - Semivariogramma sperimentale e modello esponenziale

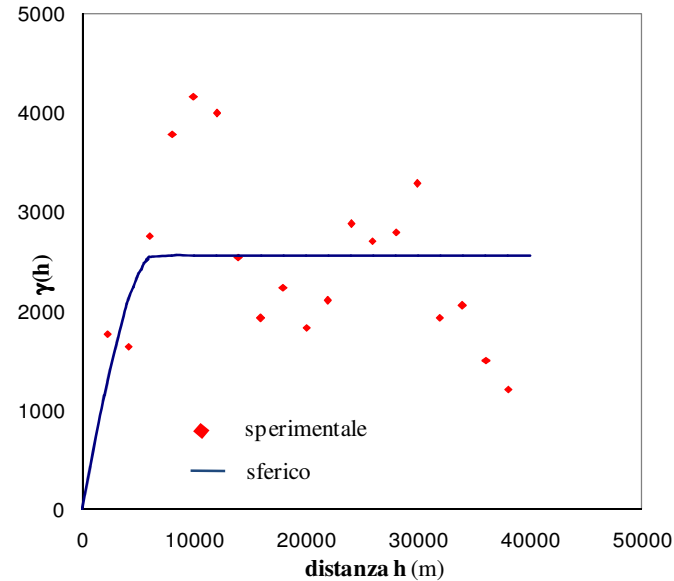


Figura 10.4.1.4: Base del sistema acquifero modellato- Semivariogramma sperimentale e modello sferico

I modelli di semivariogramma adottati sono stati anche sottoposti a procedura di cross-validazione [Isaaks e Srivastava, 1989].

Nelle Figure 10.4.1.5, 10.4.1.6 e 10.4.1.7 sono riportati i risultati ottenuti per le tre superfici di separazione. Nel dettaglio, viene riportata la distribuzione dell'errore, la stima dell'errore in funzione del valore stimato, la covarianza dell'errore e il valore stimato in funzione del valore reale misurato.

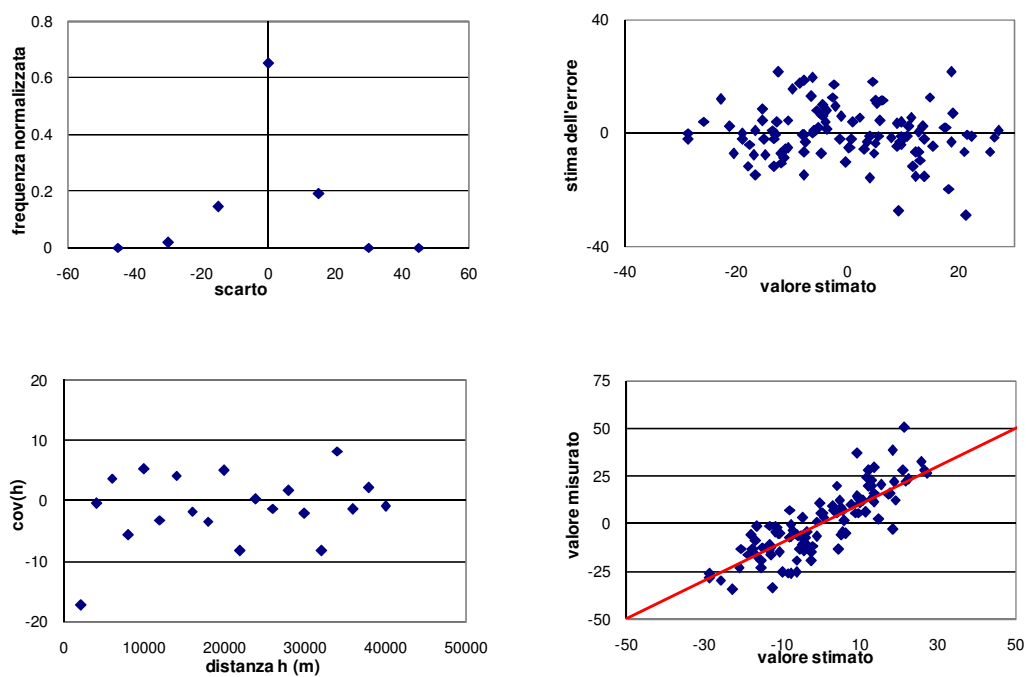


Figura 10.4.1.3: *-Tetto dello spessore intermedio* – Crossvalidazione del modello di semivariogramma esponenziale

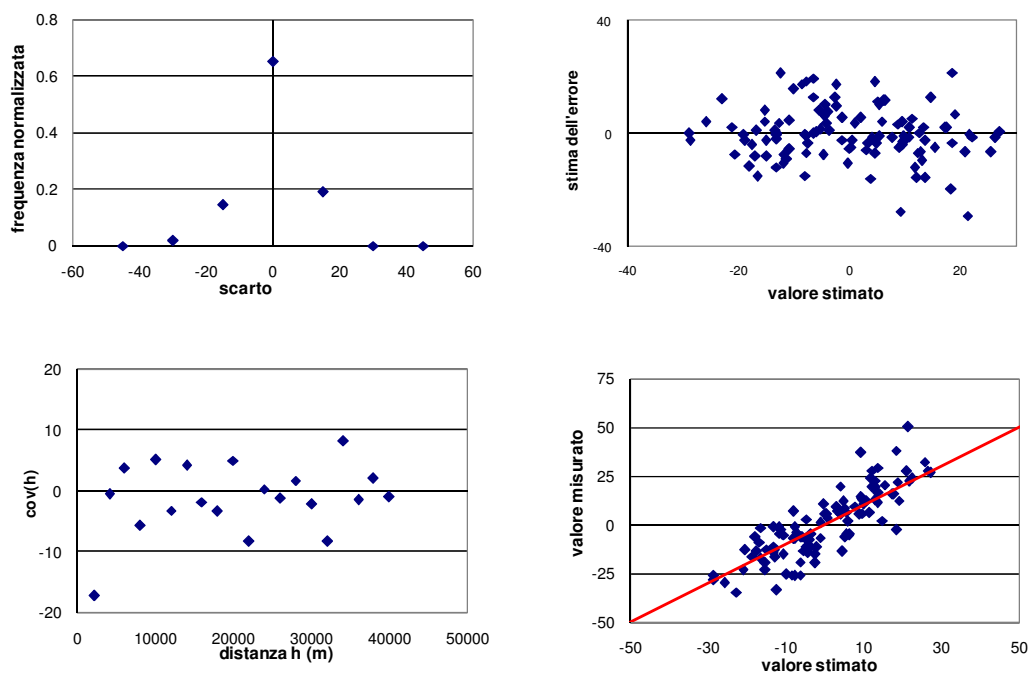


Figura 10.4.1.6: *-Base dello spessore intermedio* – Crossvalidazione del modello di semivariogramma esponenziale

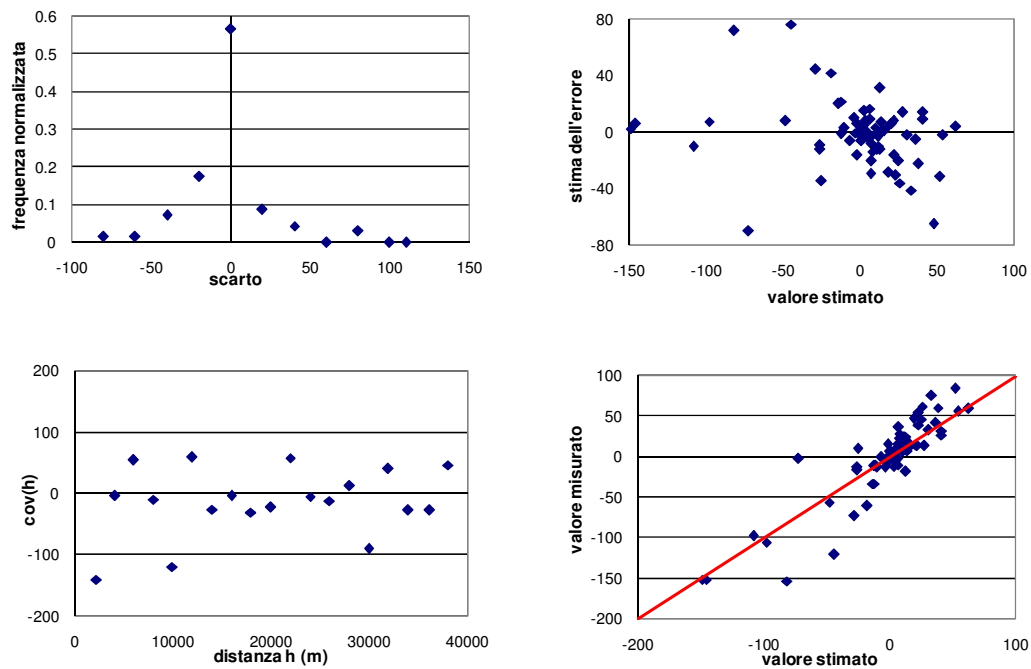


Figura 10.4.1.7: -Base del sistema acquifero modellato – Crossvalidazione del modello di semivariogramma esponenziale

Come è noto, questi risultati non dovrebbero essere interpretati come statistiche test sulla base delle quali condurre la verifica di un'ipotesi, ma, piuttosto, dovrebbero essere esaminati nel loro complesso in modo tale da confrontare gli effetti della scelta di diverse strutture (e relativi parametri) di variogramma. Su queste basi, si ritiene che i modelli ed i parametri scelti in questa fase siano in grado di fornire una rappresentazione adeguata della variabilità strutturata dei parametri di interesse nell'area in esame.

Successivamente i dati sperimentali sono stati interpolati tramite algoritmo di Ordinary kriging.

Le superfici ottenute e i campi di varianza ad esse associate sono riportati al *Capitolo 7*.

10.4.2 Modello di mezzo composito

Seguendo la procedura descritta al *Paragrafo 7.5.2*, i dati litologici sono stati indicizzati e ne è stata analizzata la variabilità spaziale in termini di calcolo dei semivariogrammi sperimentali in direzione orizzontale e verticale. La *Tabella 10.4.2.1* mostra i valori dei parametri adottati per il calcolo dei vario grammi sperimentali.

Tabella 10.4.2.1: Parametri adottati per la costruzione dei semivariogrammi sperimentali

	Direzione	
	Orizzontale	Verticale
Lag Separation (m)	2000	5
Angle Tolerance (°)	90	90
Bandwidth (m)	25000	1

E' stata osservata l'esistenza di anisotropia sia nel range che nel sill.

L'analisi variografica in direzione orizzontale è stata effettuata normalizzando le distanze rispetto al valore del Lag massimo individuato per ogni caso. La procedura è stata adottata al fine di poter successivamente stimare i parametri utilizzando il software *PEST* senza incorrere in problemi di convergenza legati alla forte differenza nell'ordine di grandezza tra h e $\gamma(h)$. In un secondo tempo i valori sono stati riportati nella scala opportuna per la corretta visualizzazione e successivo utilizzo.

E' stato valutato l'adattamento ai semivariogrammi sperimentali di modelli sferici ed esponenziali con e senza contributo attribuibile a nugget. Si è proceduto, quindi, alla discriminazione tra 4 modelli differenti: (1) modello sferico con nugget (*SPH 3 par*), (2) modello sferico (*SPH 2 par*), (3) modello esponenziale con nugget (*EXP 3 par*), (4) modello esponenziale (*EXP 2 par*). In ciascun caso, la stima dei parametri è stata condotta utilizzando il software di ottimizzazione *PEST*. La scelta del modello di variogramma è stata effettuata valutando i parametri: (1) NLL [Ye *et al.*, 2008], (2) AIC [Akaike, 1974], (3) AICc [Hurvich e Tsai, 1989], (4) BIC [Schwartz, 1978], (5) KIC [Kashyap, 1982], (6) p(M_k|d) [Neuman, 2003]. Di seguito sono riportati i valori dei parametri ottenuti per i diversi casi:

Tabella 10.4.2.2: Spessore acquifero superficiale – Valori dei Model Validation Criteria e del Posterior Weight

		NLL	AIC	AICc	BIC	KIC	p(M _k d)
Categoria 1 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-153.43	-215.54	-213.43	-212.00	-119.67	0.17
	Sph 2 par	-151.59	-215.70	-214.50	-213.35	-123.92	0.27
	Exp 3 par	-155.08	-217.19	-215.08	-213.65	-122.75	0.24
	Exp 2 par	-151.66	-215.77	-214.57	-213.42	-125.37	0.32
Categoria 1 (VERTICALE)	Sph3 par	-101.62	-146.71	-143.63	-144.04	-82.29	0.08
	Sph 2 par	-83.38	-130.46	-128.74	-128.68	-72.81	0.02
	Exp 3 par	-90.86	-135.94	-132.86	-133.27	-71.89	0.02
	Exp 2 par	-111.99	-159.07	-157.35	-157.29	-101.98	0.88
Categoria 2 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-81.29	-106.50	-99.84	-105.31	-52.97	0.08
	Sph 2 par	-79.75	-106.97	-103.54	-106.17	-62.03	0.35
	Exp 3 par	-81.31	-106.52	-99.86	-105.33	-54.36	0.10
	Exp 2 par	-80.73	-107.94	-104.51	-107.15	-63.76	0.46
Categoria 2 (VERTICALE)	Sph3 par	-129.35	-163.08	-158.64	-161.16	-103.32	0.05
	Sph 2 par	-122.61	-158.34	-155.94	-157.06	-109.13	0.11
	Exp 3 par	-120.24	-153.97	-149.52	-152.05	-100.73	0.03

	Exp 2 par	-138.14	-173.87	-171.47	-172.59	-123.38	0.81
Categoria 3 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-128.66	-190.76	-188.66	-187.23	-100.64	0.32
	Sph 2 par	-104.89	-169.00	-167.80	-166.65	-87.18	0.07
	Exp 3 par	-124.71	-186.82	-184.71	-183.28	-104.10	0.46
	Exp 2 par	-107.39	-171.50	-170.30	-169.14	-93.49	0.15
	Sph3 par	-123.24	-162.65	-159.01	-160.33	-	-
Categoria 3 (VERTICALE)	Sph 2 par	-77.73	-119.13	-117.13	-117.59	-71.01	0.08
	Exp 3 par	-101.80	-141.21	-137.57	-138.89	-87.32	0.69
	Exp 2 par	-82.94	-124.35	-122.35	-122.80	-78.99	0.23
	Sph3 par	-81.46	-106.68	-100.01	-105.48	-49.52	0.19
Categoria 4 (ORIZZONTALE)	Sph 2 par	-63.51	-90.73	-87.30	-89.93	-44.13	0.08
	Exp 3 par	-87.92	-113.14	-106.47	-111.94	-55.45	0.49
	Exp 2 par	-70.39	-97.60	-94.17	-96.81	-50.87	0.24
	Sph3 par	-89.49	-123.22	-118.78	-121.30	-73.04	0.12
Categoria 4 (VERTICALE)	Sph 2 par	-95.60	-131.33	-128.93	-130.05	-	-
	Exp 3 par	-91.27	-125.01	-120.56	-123.09	-80.97	0.38
	Exp 2 par	-84.43	-120.16	-117.76	-118.88	-83.03	0.50
	Sph3 par	-81.46	-106.68	-100.01	-105.48	-49.52	0.19

Tabella 10.4.2.3: *Spessore intermedio* – Valori dei Model Validation Criteria e del Posterior Weight

		NLL	AIC	AICc	BIC	KIC	p(M _k d)
Categoria 1 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-83.13	-125.38	-122.04	-122.88	-	-
	Sph 2 par	-76.35	-120.59	-118.75	-118.93	-56.97	0.37
	Exp 3 par	-83.13	-125.37	-122.04	-122.87	-	-
	Exp 2 par	-83.13	-127.38	-125.53	-125.71	-61.23	0.63
Categoria 1 (VERTICALE)	Sph3 par	-73.97	-107.70	-103.25	-105.78	-68.83	0.44
	Sph 2 par	-73.97	-109.70	-107.30	-108.42	-	-
	Exp 3 par	-73.96	-107.69	-103.25	-105.78	-70.43	0.56
	Exp 2 par	-73.97	-109.70	-107.30	-108.42	-	-
Categoria 2 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-57.46	-88.35	-83.35	-86.66	-37.04	1.00
	Sph 2 par	-60.43	-93.32	-90.65	-92.19	-	0.00
	Exp 3 par	-60.43	-91.32	-86.32	-89.62	-	0.00
	Exp 2 par	-60.43	-93.32	-90.65	-92.19	-	0.00
Categoria 2 (VERTICALE)	Sph3 par	-52.87	-72.41	-62.41	-71.82	-34.43	0.09
	Sph 2 par	-52.88	-74.42	-69.62	-74.03	-43.29	0.42
	Exp 3 par	-49.50	-69.04	-59.04	-68.45	-35.14	0.10
	Exp 2 par	-49.51	-71.05	-66.25	-70.65	-42.96	0.39
Categoria 3 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-48.39	-67.93	-57.93	-67.34	-22.63	0.09
	Sph 2 par	-47.34	-68.88	-64.08	-68.49	-29.76	0.32
	Exp 3 par	-48.74	-68.28	-58.28	-67.69	-24.43	0.13
	Exp 2 par	-48.24	-69.78	-64.98	-69.39	-31.82	0.46
Categoria 3 (VERTICALE)	Sph3 par	-56.74	-73.44	-60.11	-73.20	-	-
	Sph 2 par	-56.74	-75.44	-69.44	-75.28	-	-
	Exp 3 par	-56.73	-73.44	-60.10	-73.20	-52.30	1.00
	Exp 2 par	-56.74	-75.44	-69.44	-75.28	-	-

Categoria 4 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-38.40	-57.95	-47.95	-57.35	-16.88	0.11
	Sph 2 par	-36.26	-57.80	-53.00	-57.41	-23.87	0.39
	Exp 3 par	-38.40	-57.94	-47.94	-57.34	-18.45	0.15
	Exp 2 par	-36.51	-58.06	-53.26	-57.66	-23.29	0.35
Categoria 4 (VERTICALE)	Sph3 par	-28.97	-40.00	0.00	-40.62	-14.33	0.07
	Sph 2 par	-28.98	-42.00	-30.00	-42.42	-21.13	0.32
	Exp 3 par	-26.23	-37.25	2.75	-37.88	-17.34	0.14
	Exp 2 par	-26.23	-39.26	-27.26	-39.67	-22.99	0.47

Tabella 10.4.2.4: *Spessore acquifero profondo* – Valori dei Model Validation Criteria e del Posterior Weight

		NLL	AIC	AICc	BIC	KIC	p(Mld)
Categoria 1 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-183.88	-265.85	-264.31	-261.55	-147.36	0.27
	Sph 2 par	-153.81	-237.78	-236.89	-234.91	-127.28	0.04
	Exp 3 par	-192.20	-274.17	-272.63	-269.87	-156.09	0.61
	Exp 2 par	-160.07	-244.05	-243.16	-241.18	-134.45	0.08
Categoria 1 (VERTICALE)	Sph3 par	-143.55	-219.85	-218.18	-215.74	-125.08	0.04
	Sph 2 par	-162.92	-241.22	-240.26	-238.49	-147.30	0.36
	Exp 3 par	-145.96	-222.26	-220.59	-218.16	-128.11	0.05
	Exp 2 par	-166.30	-244.60	-243.64	-241.86	-151.51	0.55
Categoria 2 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-85.32	-116.22	-111.22	-114.52	-56.13	0.20
	Sph 2 par	-75.56	-108.45	-105.78	-107.32	-56.53	0.21
	Exp 3 par	-86.07	-116.96	-111.96	-115.27	-58.03	0.27
	Exp 2 par	-77.42	-110.31	-107.65	-109.18	-59.25	0.32
Categoria 2 (VERTICALE)	Sph3 par	-83.41	-105.79	-97.79	-104.88	-58.94	0.01
	Sph 2 par	-101.46	-128.68	-125.25	-127.88	-85.79	0.73
	Exp 3 par	-80.32	-102.69	-94.69	-101.79	-58.54	0.01
	Exp 2 par	-91.90	-119.11	-115.68	-118.32	-79.05	0.25
Categoria 3 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-96.00	-149.60	-147.10	-146.46	-69.21	0.20
	Sph 2 par	-86.50	-142.09	-140.68	-140.00	-69.16	0.19
	Exp 3 par	-93.28	-146.87	-144.37	-143.74	-71.85	0.27
	Exp 2 par	-87.95	-143.54	-142.13	-141.45	-74.04	0.34
Categoria 3 (VERTICALE)	Sph3 par	-168.69	-227.96	-225.74	-224.55	-143.58	0.08
	Sph 2 par	-157.83	-219.10	-217.83	-216.83	-142.75	0.08
	Exp 3 par	-187.29	-246.56	-244.34	-243.16	-160.81	0.56
	Exp 2 par	-169.49	-230.76	-229.49	-228.49	-154.69	0.28
Categoria 4 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-51.74	-88.31	-84.31	-86.19	-	-
	Sph 2 par	-51.74	-90.31	-88.13	-88.90	-35.68	0.41
	Exp 3 par	-50.98	-87.54	-83.54	-85.42	-28.97	0.16
	Exp 2 par	-51.28	-89.84	-87.66	-88.43	-35.93	0.43
Categoria 4 (VERTICALE)	Sph3 par	-152.17	-214.28	-212.18	-210.75	-129.49	0.09
	Sph 2 par	-149.97	-214.08	-212.88	-211.72	-138.00	0.24
	Exp 3 par	-156.22	-218.33	-216.23	-214.80	-134.30	0.16
	Exp 2 par	-156.22	-220.33	-219.13	-217.97	-145.02	0.51

Si nota che, in alcuni casi, non si è riportato il valore di KIC (e, quindi, del corrispondente $p(M_k|d)$). In tali situazioni il processo di ottimizzazione non ha fornito risultati affidabili, in termini di matrice di covarianza del sistema. Questo è da attribuirsi alla difficoltà di identificare, all'interno di alcuni insiemi di dati sperimentali disponibili, una chiara struttura di correlazione spaziale, come evidenziato da alcuni dei grafici riportati. Tra i modelli valutati, quello più affidabile è associato al valore più basso di uno dei *Model Validation Criteria* (in particolar modo si è soffermata l'attenzione sul KIC) e al valore più alto del *Posterior Weight*. Si rileva, che, in alcuni casi, i valori assunti dai criteri di identificazione per diversi modelli di semivariogramma sono molto simili. I modelli interpretativi scelti per ciascun semivariogramma sperimentale unitamente ai relativi parametri sono riportati nelle *Tabelle 10.4.2.5, 10.4.2.6, 10.4.2.7*.

Tabella 10.4.2.5: Spessore acquifero Superficiale - Modelli di semivariogrammi e relativi parametri

Modello	CATEGORIA 1		CATEGORIA 2		CATEGORIA 3		CATEGORIA 4	
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale
	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale
Nugget (m^2)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.03	0.04	0.00
Sill (m^2)	0.18	0.20	0.03	0.03	0.75	0.36	0.14	0.40
Range (m)	1000.00	21.70	2520.00	29.90	230000.00	244.70	5465.00	263.00

Tabella 10.4.2.6: Spessore intermedio - Modelli di semivariogrammi e relativi parametri

Modello	CATEGORIA 1		CATEGORIA 2		CATEGORIA 3		CATEGORIA 4	
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale
	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Sferico	Esponenziale	Sferico	Sferico	Esponenziale
Nugget (m^2)	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Sill (m^2)	0.17	0.05	0.00	0.86	0.00	0.15	0.15	0.30
Range (m)	806.50	2.31	0.00	10.64	2.00	1.50	1050.92	17.44

Tabella 10.4.2.7: Spessore acquifero profondo - Modelli di semivariogrammi e relativi parametri

Modello	CATEGORIA 1		CATEGORIA 2		CATEGORIA 3		CATEGORIA 4	
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale
	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Sferico	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale
Nugget (m^2)	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00
Sill (m^2)	0.15	0.21	0.10	0.06	0.46	0.07	0.22	0.12
Range (m)	2526.42	6.77	4791.11	12.93	64384.90	22.84	2231.77	56.18

Le *Figure 10.4.2.1 – 10.4.2.12* mostrano i semivariogrammi sperimentali calcolati e i relativi modelli interpretativi adottati.

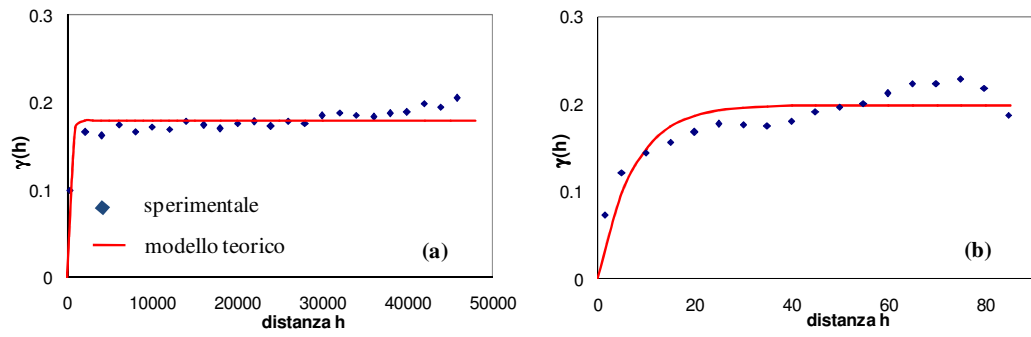


Figura 10.4.2.1: Spessore acquifero superficiale, Categoria 1- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

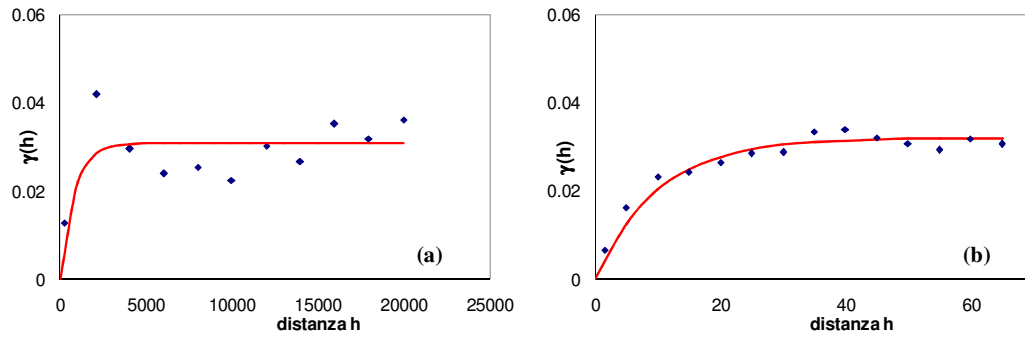


Figura 10.4.2.2: Spessore acquifero superficiale, Categoria 2- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

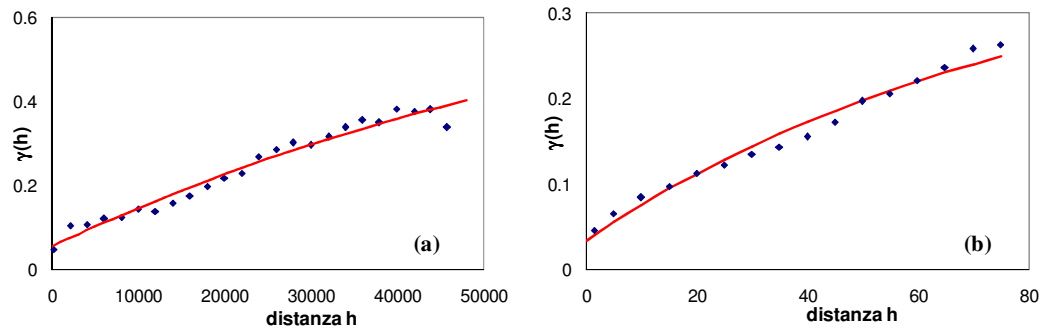


Figura 10.4.2.3: Spessore acquifero superficiale, Categoria 3- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

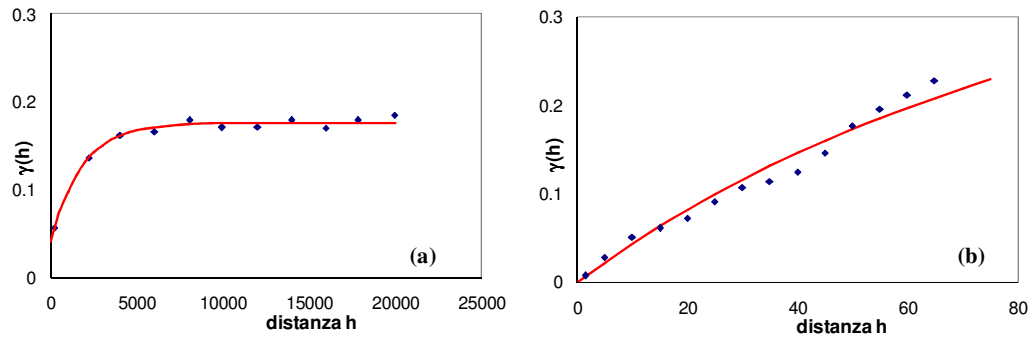


Figura 10.4.2.4: Spessore acquifero superficiale, Categoria 4- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

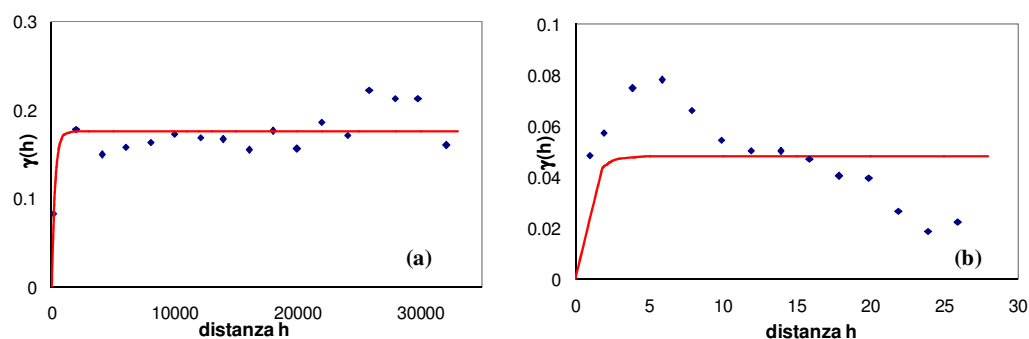


Figura 10.4.2.5: *Spessore intermedio, Categoria 1*- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

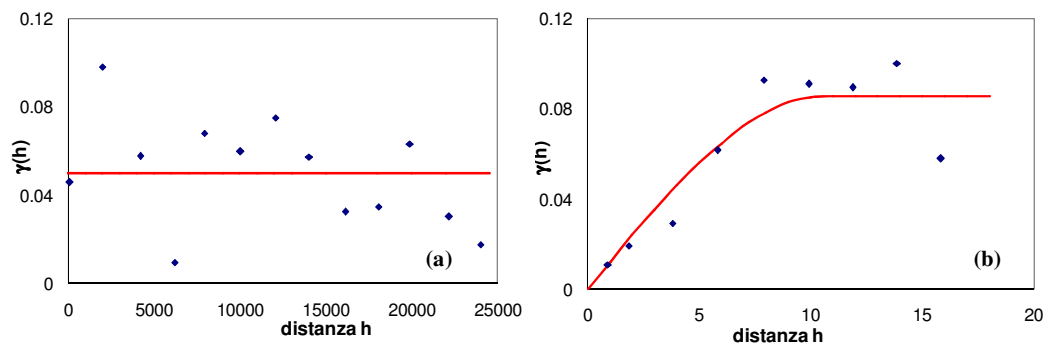


Figura 10.4.2.6: *Spessore intermedio, Categoria 2*- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

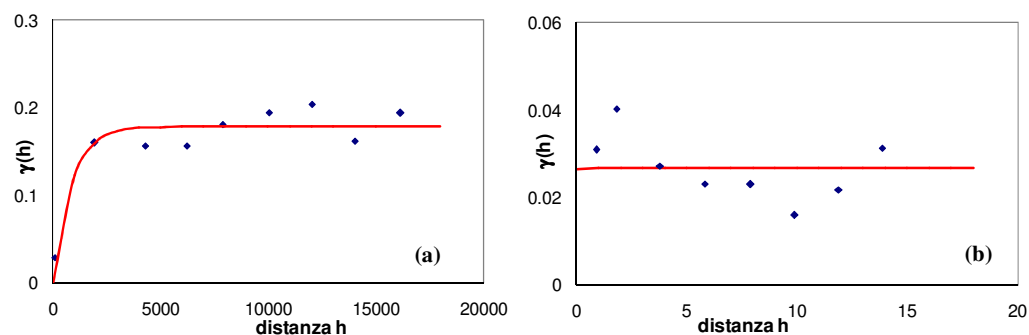


Figura 10.4.2.7: *Spessore intermedio, Categoria 3*- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

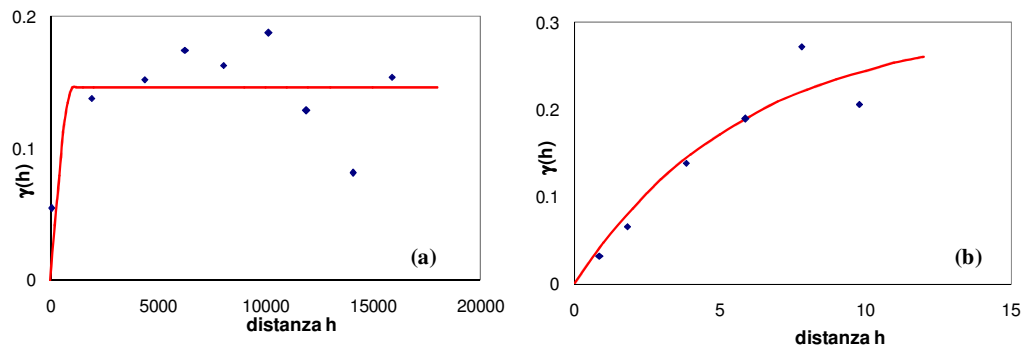


Figura 10.4.2.8: *Spessore intermedio, Categoria 4*- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

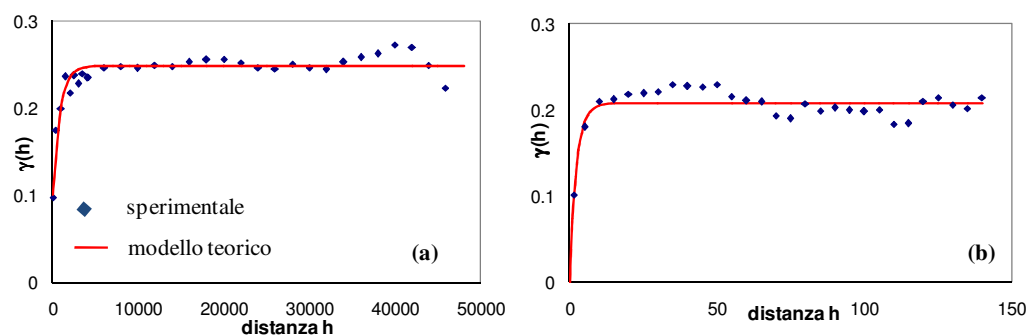


Figura 10.4.2.9: Spessore acquifero profondo, Categoria 1- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

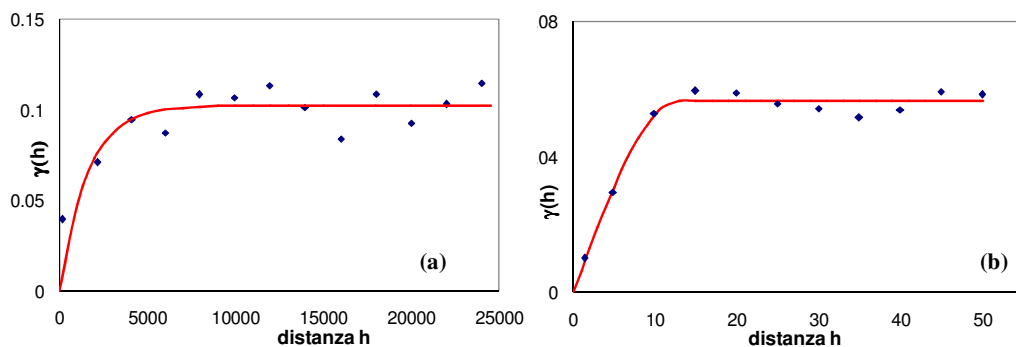


Figura 10.4.2.10: Spessore acquifero profondo, Categoria 2- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

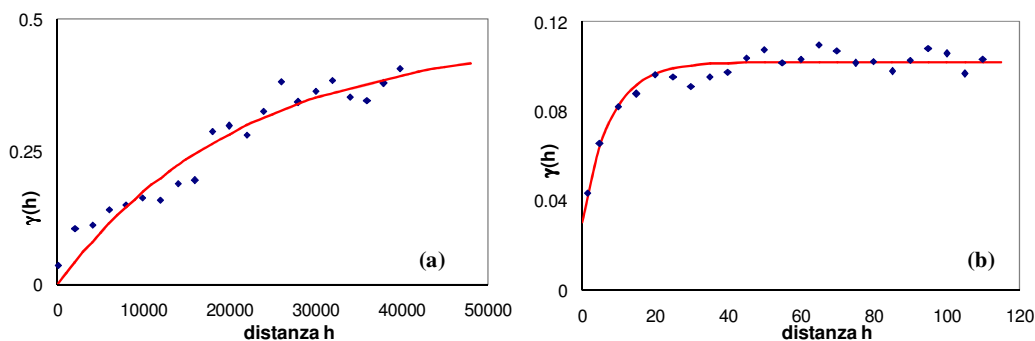


Figura 10.4.2.11: Spessore acquifero profondo, Categoria 3- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

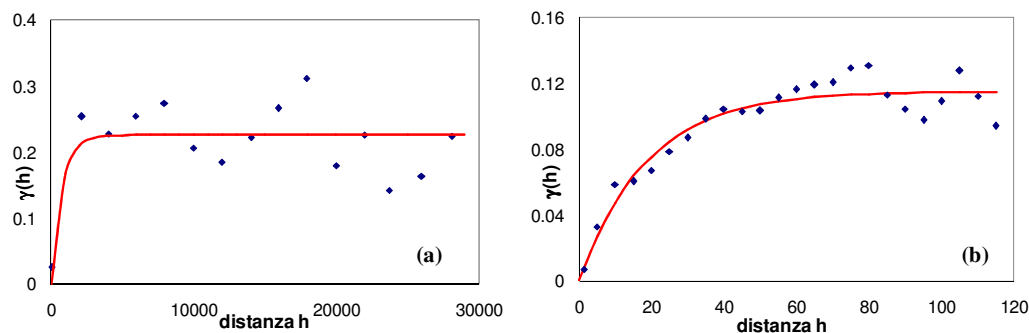
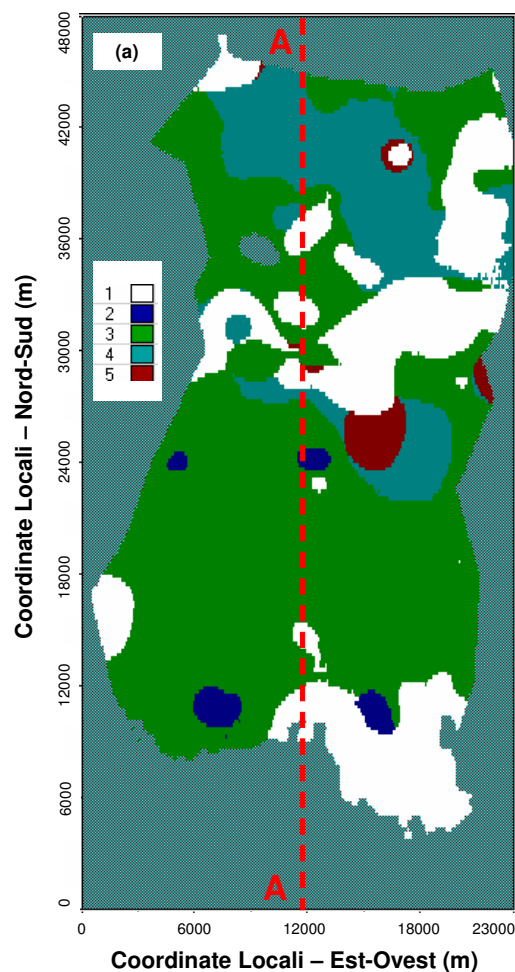


Figura 10.4.2.12: Spessore acquifero profondo, Categoria 4- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

I modelli di variogrammi sono stati utilizzati all'interno di un algoritmo di kriging. Quest'ultimo è stato implementato ricorrendo alla subroutine *kt3d* del *GSLIB* [Deutsch e Journal, 1998].

Da questa applicazione si ottengono 4 distribuzioni di litotipi, una per ogni categoria analizzata (la quinta non viene implementata direttamente in quanto ricavabile per differenza). È quindi possibile applicare la procedura suggerita da *Guadagnini et al.* [2004] per ricavare la distribuzione spaziale finale di geomateriali e quindi la distribuzione spaziale delle permeabilità all'interno del dominio di interesse, come descritto nel *Paragrafo 7.5.2*.

La distribuzione dei 5 litotipi individuati nella regione interessata dal modello matematico è rappresentata in *Figura* . La visualizzazione è stata ottenuta dalla sezione Input di Visual Modflow.



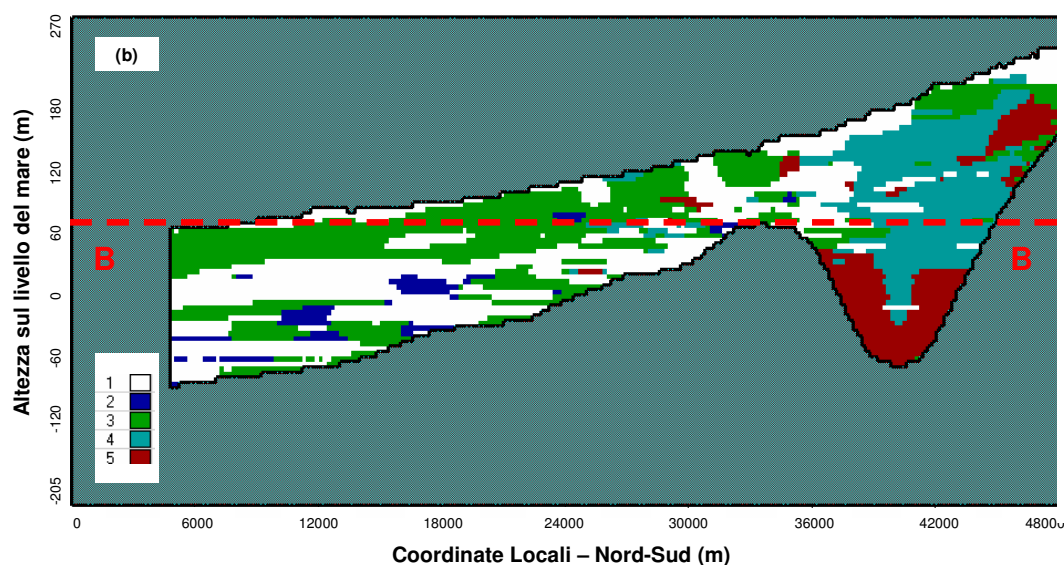


Figura 10.4.2.12: Stima della distribuzione spaziale dei 5 litotipi individuati nella regione interessata dal modello matematico: (a) vista planimetrica del layer 40 (Sez. B-B) e (b) sezione verticale in corrispondenza della colonna 120 (Sez. A-A)

10.4.3 Modello a continui multipli

La ricostruzione del campo di permeabilità utilizzando la procedura di modello a continui multipli è stata ottenuta seguendo la procedura descritta nel *Paragrafo 7.5*

Si è proceduto quindi ad un'analisi variografica dei dati litostratigrafici, opportunamente indicizzati. Ai variogrammi sperimentali, calcolati in direzione orizzontale e verticale, sono stati adattati modelli teorici i cui parametri sono stati stimati attraverso l'accoppiamento con il software *PEST*. Il modello che meglio sembra interpretare l'andamento sperimentale è stato scelto sulla base di diversi *Model Validation Criteria* ed attraverso i *Posterior Model Weights*, i cui valori sono di seguito riportati.

Tabella 10.4.3.1: *Spessore acquifero superficiale* – Valori dei Model Validation Criteria e del Posterior Weight

		NLL	AIC	AICc	BIC	KIC	p(M _k d)
Categoria 1 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-153.43	-215.54	-213.43	-212.00	-119.67	0.17
	Sph 2 par	-151.59	-215.70	-214.50	-213.35	-123.92	0.27
	Exp 3 par	-155.08	-217.19	-215.08	-213.65	-122.75	0.24
	Exp 2 par	-151.66	-215.77	-214.57	-213.42	-125.37	0.32
Categoria 1 (VERTICALE)	Sph3 par	-101.62	-146.71	-143.63	-144.04	-82.29	0.08
	Sph 2 par	-83.38	-130.46	-128.74	-128.68	-72.81	0.02
	Exp 3 par	-90.86	-135.94	-132.86	-133.27	-71.89	0.02
	Exp 2 par	-111.99	-159.07	-157.35	-157.29	-101.98	0.88
Categoria 2 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-105.38	-139.11	-134.66	-137.19	-	-
	Sph 2 par	-105.38	-141.11	-138.71	-139.83	-81.90	1.00

Categoria 2 (VERTICALE)	Exp 3 par	-105.36	-139.09	-134.64	-137.17	-	-
	Exp 2 par	-101.85	-137.58	-135.18	-136.31	-	-
	Sph3 par	-161.59	-203.83	-200.50	-201.33	-133.49	0.09
	Sph 2 par	-159.00	-203.25	-201.40	-201.58	-142.64	0.29
	Exp 3 par	-163.66	-205.90	-202.57	-203.40	-136.30	0.13
	Exp 2 par	-161.92	-206.17	-204.32	-204.50	-146.66	0.49
	Sph3 par	-124.59	-181.02	-178.67	-177.75	-94.47	0.54
	Sph 2 par	-80.71	-139.14	-137.81	-136.96	-61.62	0.01
	Exp 3 par	-119.26	-175.69	-173.34	-172.42	-91.84	0.40
	Exp 2 par	-88.69	-147.12	-145.79	-144.94	-70.78	0.04
Categoria 3 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-109.33	-154.41	-151.33	-151.74	-87.95	0.18
	Sph 2 par	-88.98	-136.06	-134.35	-134.28	-77.72	0.05
	Exp 3 par	-119.43	-164.51	-161.43	-161.84	-97.82	0.60
	Exp 2 par	-98.93	-146.01	-144.30	-144.23	-87.78	0.17
Categoria 3 (VERTICALE)	Sph3 par	-87.28	-115.33	-109.62	-113.88	-56.10	0.20
	Sph 2 par	-69.99	-100.04	-97.04	-99.07	-50.45	0.09
	Exp 3 par	-91.82	-119.88	-114.16	-118.42	-60.76	0.42
	Exp 2 par	-79.93	-109.98	-106.98	-109.01	-58.45	0.29
Categoria 4 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-118.68	-163.76	-160.68	-161.09	-100.11	0.77
	Sph 2 par	-83.99	-131.08	-129.36	-129.30	-76.70	0.04
	Exp 3 par	-96.08	-141.16	-138.09	-138.49	-80.29	0.06
	Exp 2 par	-91.10	-138.18	-136.47	-136.40	-85.69	0.13

Tabella 10.4.3.2: *Spessore intermedio* – Valori dei Model Validation Criteria e del Posterior Weight

		NLL	AIC	AICc	BIC	KIC	p(M _k d)
Categoria 1 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-83.13	-125.38	-122.04	-122.88	-	-
	Sph 2 par	-76.35	-120.59	-118.75	-118.93	-56.97	0.37
	Exp 3 par	-83.13	-125.37	-122.04	-122.87	-	-
	Exp 2 par	-83.13	-127.38	-125.53	-125.71	-61.23	0.63
Categoria 1 (VERTICALE)	Sph3 par	-73.97	-107.70	-103.25	-105.78	-68.83	0.44
	Sph 2 par	-73.97	-109.70	-107.30	-108.42	-	-
	Exp 3 par	-73.96	-107.69	-103.25	-105.78	-70.43	0.56
	Exp 2 par	-73.97	-109.70	-107.30	-108.42	-	-
Categoria 2 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-89.54	-120.44	-115.44	-118.74	-72.40	0.44
	Sph 2 par	-89.59	-122.48	-119.81	-121.35	-	-
	Exp 3 par	-89.55	-120.44	-115.44	-118.75	-73.93	0.56
	Exp 2 par	-89.59	-122.48	-119.81	-121.35	-	-
Categoria 2 (VERTICALE)	Sph3 par	-	-	-	-	-	-
	Sph 2 par	-75.52	-97.06	-92.26	-96.67	-62.58	1.00
	Exp 3 par	-	-	-	-	-	-
	Exp 2 par	-	-	-	-	-	-
Categoria 3 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-93.31	-135.55	-132.22	-133.05	-66.63	0.00
	Sph 2 par	-91.30	-135.54	-133.70	-133.88	-71.37	0.16
	Exp 3 par	-94.69	-136.94	-133.60	-134.44	-82.23	0.65

Categoria 3 (VERTICALE)	Exp 2 par	-95.15	-139.40	-137.55	-137.73	-72.67	0.19
	Sph3 par	-69.64	-86.34	-73.01	-86.10	-45.89	0.11
	Sph 2 par	-66.61	-85.31	-79.31	-85.15	-51.09	0.29
	Exp 3 par	-67.77	-84.47	-71.14	-84.23	-46.11	0.11
	Exp 2 par	-68.89	-87.60	-81.60	-87.44	-53.92	0.49
Categoria 4 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-92.43	-123.33	-118.33	-121.63	-63.62	0.22
	Sph 2 par	-83.05	-115.95	-113.28	-114.82	-64.48	0.25
	Exp 3 par	-91.88	-122.77	-117.77	-121.07	-64.22	0.24
	Exp 2 par	-88.05	-120.95	-118.28	-119.82	-65.51	0.29
Categoria 4 (VERTICALE)	Sph3 par	-52.03	-63.06	-23.06	-63.68	-	-
	Sph 2 par	-52.03	-65.06	-53.06	-65.47	-36.81	0.00
	Exp 3 par	-51.79	-62.82	-22.82	-63.44	-43.10	0.01
	Exp 2 par	-51.80	-64.83	-52.83	-65.24	-66.29	0.99

Tabella 10.4.3.3: *Spessore acquifero profondo*– Valori dei Model Validation Criteria e del Posterior Weight

		NLL	AIC	AICc	BIC	KIC	p(M _{ld})
Categoria 1 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-183.88	-265.85	-264.31	-261.55	-147.36	0.27
	Sph 2 par	-153.81	-237.78	-236.89	-234.91	-127.28	0.04
	Exp 3 par	-192.20	-274.17	-272.63	-269.87	-156.09	0.61
	Exp 2 par	-160.07	-244.05	-243.16	-241.18	-134.45	0.08
Categoria 1 (VERTICALE)	Sph3 par	-143.55	-219.85	-218.18	-215.74	-125.08	0.04
	Sph 2 par	-162.92	-241.22	-240.26	-238.49	-147.30	0.36
	Exp 3 par	-145.96	-222.26	-220.59	-218.16	-128.11	0.05
	Exp 2 par	-166.30	-244.60	-243.64	-241.86	-151.51	0.55
Categoria 2 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-106.15	-148.40	-145.06	-145.90	-	-
	Sph 2 par	-101.03	-145.28	-143.43	-143.61	-	-
	Exp 3 par	-106.15	-148.39	-145.06	-145.89	-	-
	Exp 2 par	-106.15	-150.40	-148.55	-148.73	-82.57	1.00
Categoria 2 (VERTICALE)	Sph3 par	-103.16	-128.38	-121.71	-127.18	-75.89	0.08
	Sph 2 par	-97.85	-125.07	-121.64	-124.27	-82.26	0.22
	Exp 3 par	-104.31	-129.53	-122.86	-128.34	-77.89	0.11
	Exp 2 par	-104.07	-131.29	-127.86	-130.49	-88.48	0.59
Categoria 3 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-118.08	-163.16	-160.08	-160.49	-85.79	0.35
	Sph 2 par	-85.47	-132.56	-130.84	-130.78	-65.10	0.03
	Exp 3 par	-119.57	-164.65	-161.57	-161.98	-88.20	0.47
	Exp 2 par	-103.22	-150.30	-148.59	-148.52	-78.85	0.15
Categoria 3 (VERTICALE)	Sph3 par	-107.14	-138.04	-133.04	-136.34	-80.38	0.17
	Sph 2 par	-85.55	-118.45	-115.78	-117.32	-71.44	0.05
	Exp 3 par	-111.12	-142.01	-137.01	-140.32	-84.72	0.32
	Exp 2 par	-103.08	-135.97	-133.30	-134.84	-87.26	0.47
Categoria 4 (ORIZZONTALE)	Sph3 par	-109.64	-166.07	-163.72	-162.80	-82.70	0.27
	Sph 2 par	-95.79	-154.23	-152.89	-152.04	-78.76	0.17
	Exp 3 par	-106.29	-162.72	-160.37	-159.45	-82.67	0.27
	Exp 2 par	-99.54	-157.97	-156.64	-155.79	-83.25	0.29

Categoria 4 (VERTICALE)	Sph3 par	-75.54	-100.76	-94.09	-99.56	-55.75	0.16
	Sph 2 par	-67.51	-94.73	-91.30	-93.93	-56.54	0.18
	Exp 3 par	-78.23	-103.45	-96.78	-102.25	-59.07	0.27
	Exp 2 par	-71.19	-98.41	-94.98	-97.61	-61.09	0.38

Le Tabelle 10.4.3.4., 10.4.3.5 e 10.4.3.6 presentano i modelli teorici scelti unitamente ai parametri che li caratterizzano.

Tabella 10.4.3.4: Spessore acquifero superficiale - Modelli di semivariogrammi e relativi parametri

Modello	CATEGORIA 1		CATEGORIA 2		CATEGORIA 3		CATEGORIA 4	
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale
	Esponenziale	Esponenziale	Sferico	Esponenziale	Sferico	Esponenziale	Esponenziale	Sferico
Nugget (m^2)	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.073	0.046	0.05
Sill (m^2)	0.18	0.20	0.026	0.026	0.14	0.14	0.087	0.21
Range (m)	1000.0	21.70	683.20	14.96	28263.80	40.02	5853.79	122.55

Tabella 10.4.3.5: Spessore intermedio - Modelli di semivariogrammi e relativi parametri

Modello	CATEGORIA 1		CATEGORIA 2		CATEGORIA 3		CATEGORIA 4	
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale
	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Sferico	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale
Nugget (m^2)	0.00	0.00	0.018	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00
Sill (m^2)	0.17	0.05	0.00	0.009	0.06	0.04	0.06	0.028
Range (m)	806.50	2.31	4116.55	2.74	1042.47	2.87	683.61	0.13

Tabella 10.4.3.6: Spessore acquifero profondo - Modelli di semivariogrammi e relativi parametri

Modello	CATEGORIA 1		CATEGORIA 2		CATEGORIA 3		CATEGORIA 4	
	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale	Orizzontale	Verticale
	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale	Esponenziale
Nugget (m^2)	0.10	0.00	0.00	0.00	0.094	0.00	0.00	0.00
Sill (m^2)	0.15	0.21	0.068	0.052	0.11	0.16	0.14	0.085
Range (m)	2526.42	6.77	566.68	10.71	6914.78	8.25	24950.68	14.19

Le Figura – 10.4.3.12 rappresentano i semivariogrammi sperimentali calcolati e i relativi modelli interpretativi adottati.

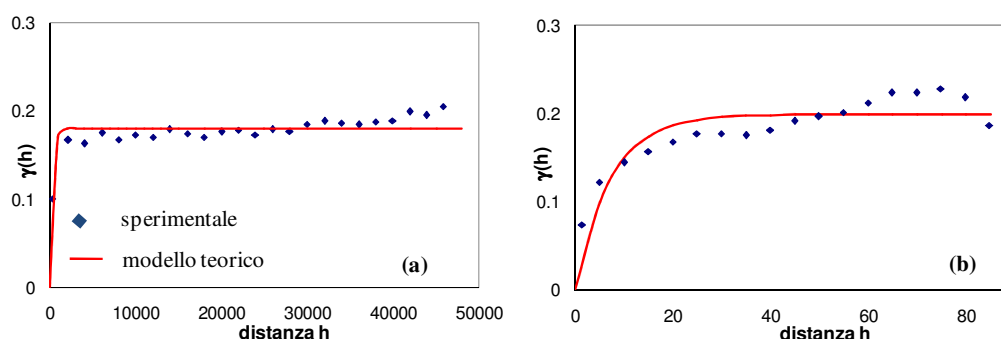


Figura 10.4.3.1: Spessore acquifero superficiale, Categoria 1-Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

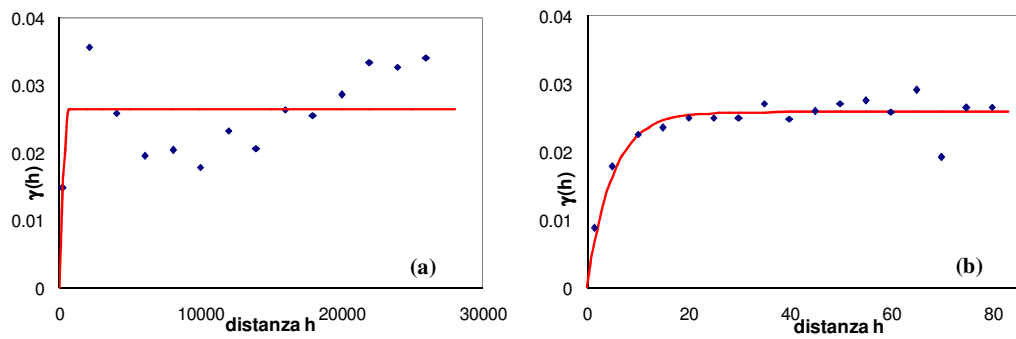


Figura 10.4.3.2: Spessore acquifero superficiale, Categoria 2- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

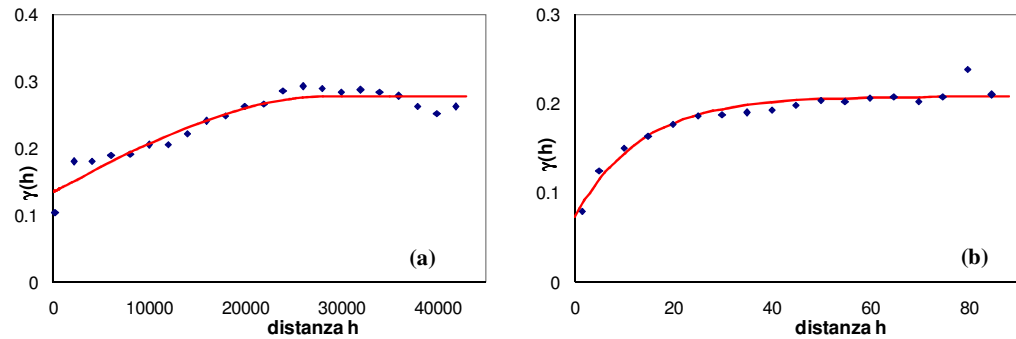


Figura 10.4.3.3: Spessore acquifero superficiale, Categoria 3- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

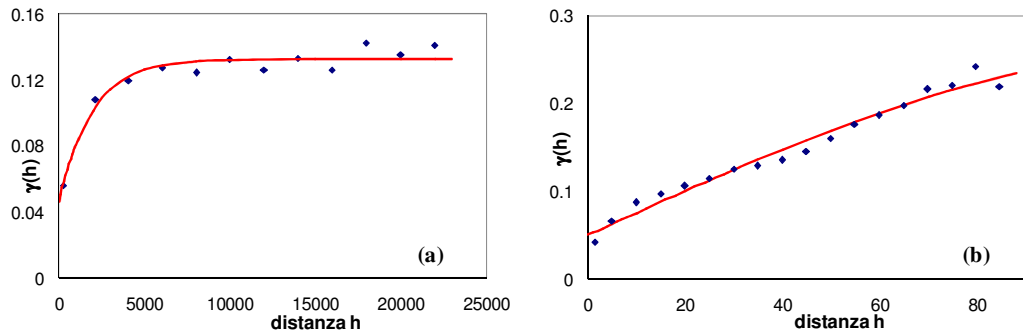


Figura 10.4.3.4: Spessore acquifero superficiale, Categoria 4- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

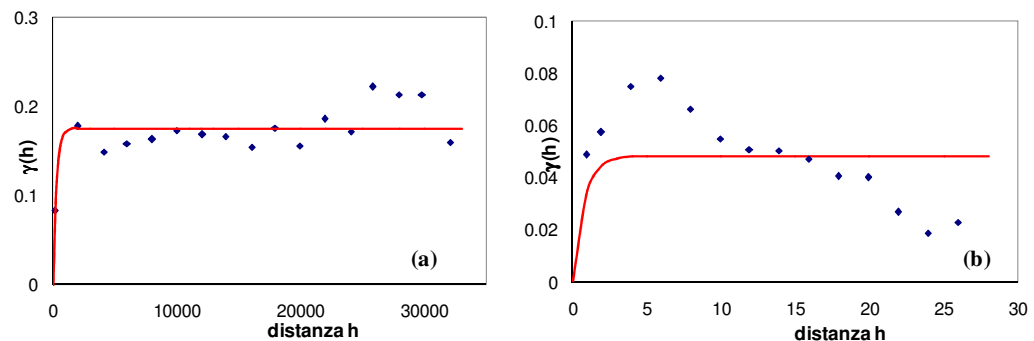


Figura 10.4.3.5: Spessore intermedio, Categoria 1- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

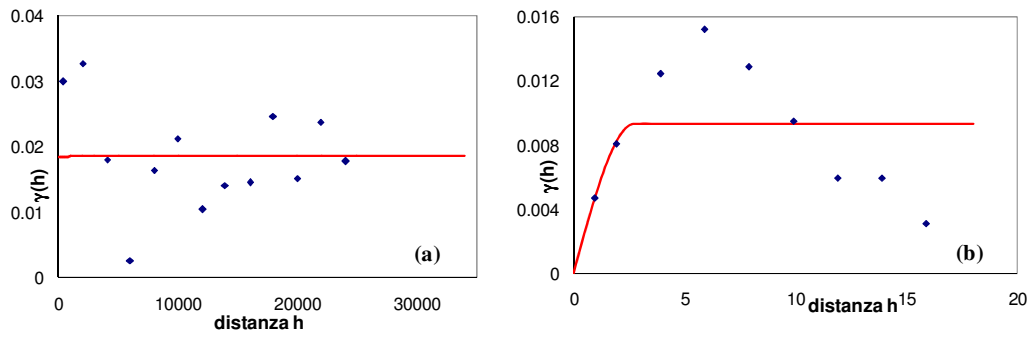


Figura 10.4.3.6: *Spessore intermedio, Categoria 2-* Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

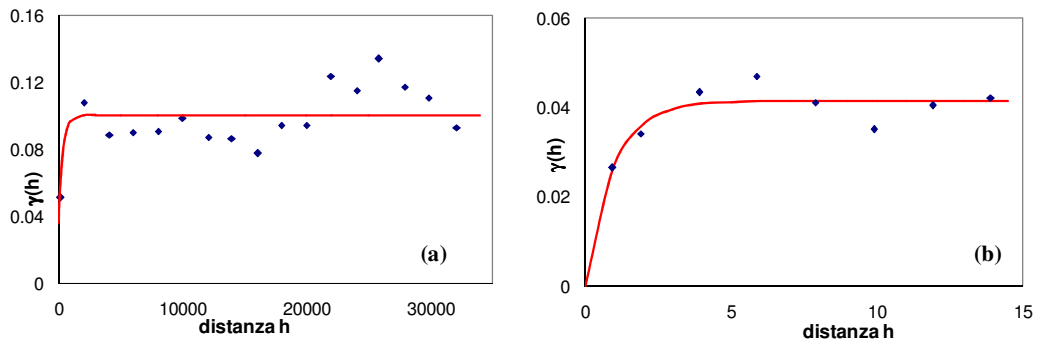


Figura 10.4.3.7: *Spessore intermedio, Categoria 3-* Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

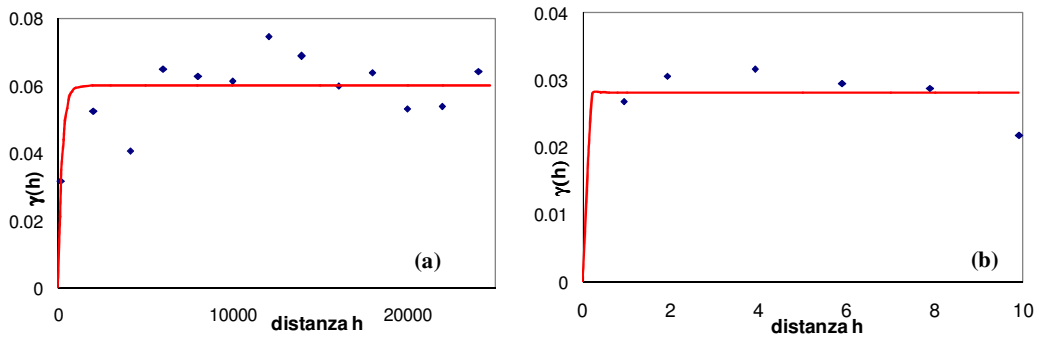


Figura 10.4.3.8: *Spessore intermedio, Categoria 4-* Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

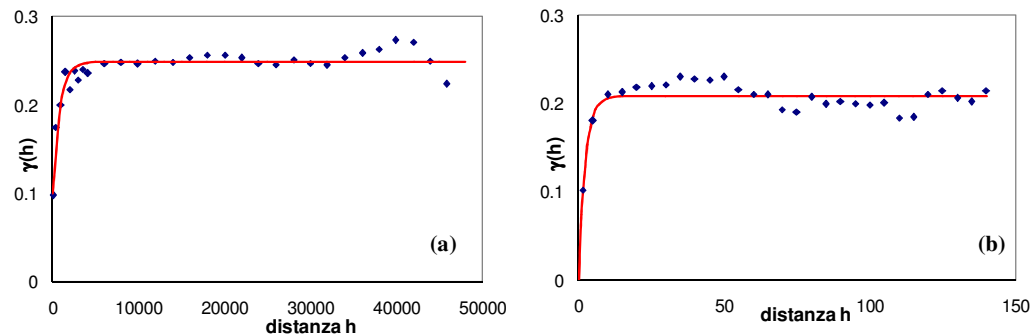


Figura 10.4.3.9: *Spessore acquifero profondo, Categoria 1-* Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

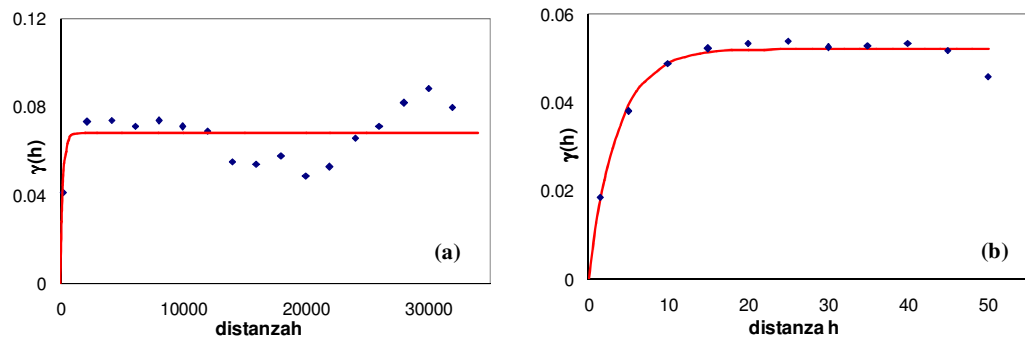


Figura 10.4.3.10: - Spessore acquifero profondo, Categoria 2- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

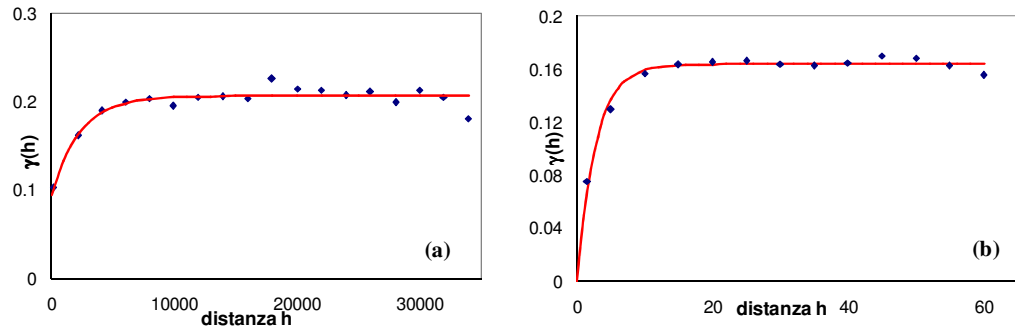


Figura 10.4.3.11: Spessore acquifero profondo, Categoria 3- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

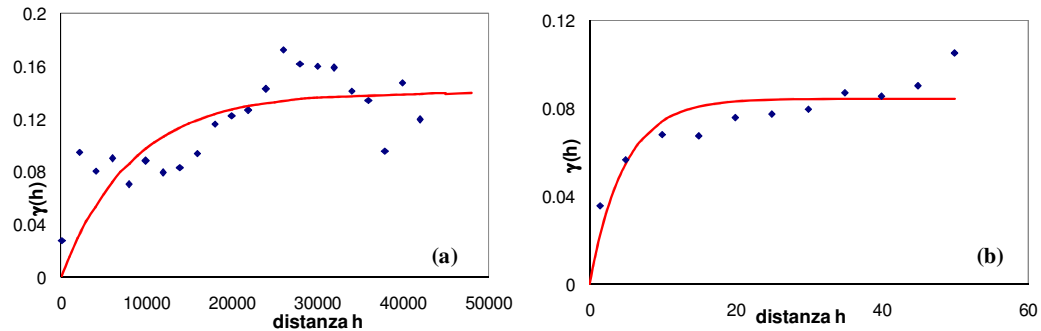


Figura 10.4.3.12: Spessore acquifero profondo, Categoria 4- Semivariogrammi Orizzontale (a) e Verticale (b)

Allo stesso modo del modello a continui multipli, si è proceduto con l'implementazione dell'algoritmo di kriging. Assemblando le distribuzioni delle 5 categorie seguendo la procedura descritta nel *Paragrafo 7.5.3*, il risultato finale ottenuto è assimilabile ad una percentuale volumetrica del generico geomateriale nella singola cella.